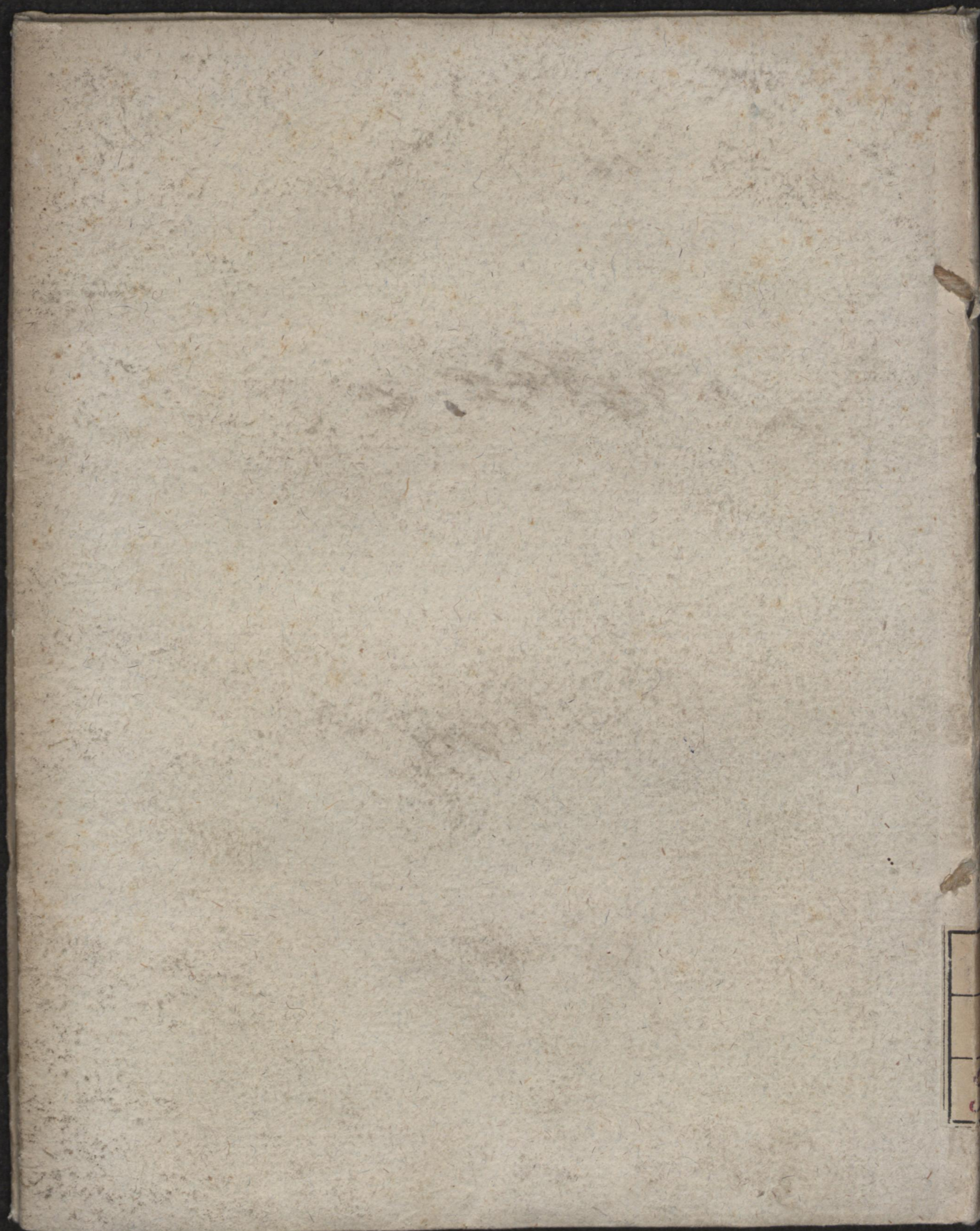
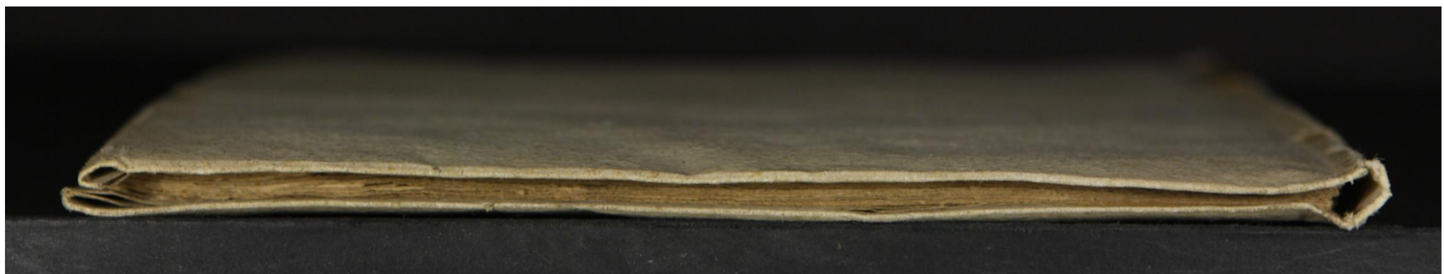
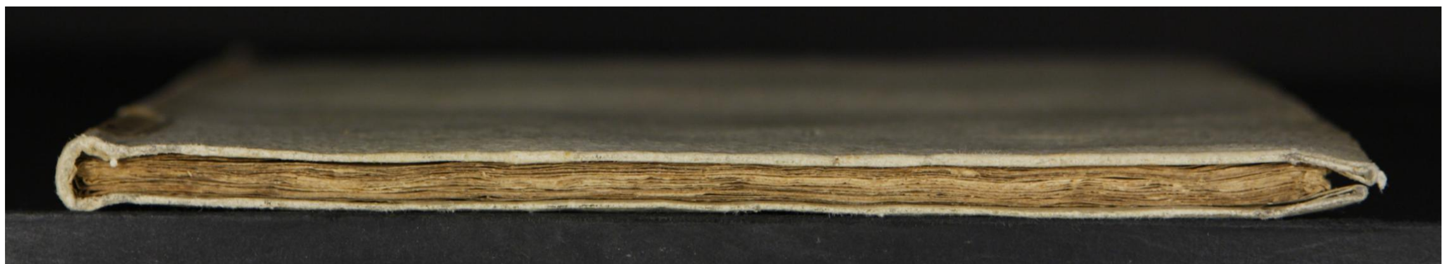










XI
MERC.

CANDIDIS atque *INGENUIS*

MATHEMATUM

CULTORIBUS

Opellam hanc lubens meritóque

DEDICAT

AUTHOR.

LOGARITHMO-TECHNIA:
SIVE
Methodus construendi
LOGARITHMOS
Nova, accurata, & facilis;
SCRIPTO
Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.
Nonis *Augusti*: Cui nunc accedit.
Vera Quadratura Hyperbolæ,
&
Inventio *Summæ* Logarithmorum.



AUCTORE *NICOLAO MERCATORE*
Holsato, è Societate Regia.

HUIC ETIAM JUNGITUR
MICHAELIS ANGELI RICCII Exercitatio
Geometrica de Maximis & Minimis; hîc ob Argumenti
præstantiam & Exemplarium raritatem recusa.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in
vico vulgò vocato *Little Britain*. Anno M.DC.LXVIII.

Michaelis Angeli Riccii

EXERCITATIO GEOMETRICA

De MAXIMIS & MINIMIS.



LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt*
Bibliopolæ, in vico vulgo vocato *Little
Britain*. Anno M. DC. LXVIII.



LOGARITHMOTECHNIA.



LOGARITHMUS composito vocabulo dicitur à ratione & numero, quasi rationum numerus; id quod planè cum re consentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quam numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque ad unitatem obtinet. In qua definitione rationes accipimus, tanquam magnitudines partibus constantes homogeneis toti; strictiori aliquantò notione, quàm vulgò solet. Quamvis enim ratum sit, rationem omnem ex comparatione quantitatum homogenearum oriri: certè nec quævis comparatio producit rationem; nec quarumvis quantitatum, homogenearum licèt, habitudo est ratio quanta, seu partibus constans. Nam æqualitatis, quæ dicitur, ratio, est illa quidem quantitatum homogenearum, atque æqualium, habitudo mutua, unde nec rationis appellatione privandam autumem, cui definitio *Euclidéa* competit non minùs ac aliis rationibus, quas inæqualitatis vocant: sed nihil obstat, quo minus generalem istam rationis notionem porrò dividamus ita, ut quantitatem habere putentur solæ rationes, ex inæqualium habitudine ortæ; at æqualitatis ratio in indivisibili consistat, habeatque se in rationibus, quemadmodum punctum in magnitudinibus, aut nullitas in numeris, quæ singula quantitate ac partibus carent. Componas enim sexcentas rationes æqualitatis, non augetur nec minuitur ratio, sed eadem manet æqualitas: secùs atque in rationibus inæqualitatis, quæ additæ vel detractæ invicem, faciunt rationem majorem vel minorem. Quantum autem est, quod additis vel demtis partibus homogeneis augetur minuiturve. Sed nec quævis comparatio quantitatum homogenearum rationem producit. Veluti cùm numerum dividimus per numerum; comparantur utique quantitates homogeneæ, spectando quoties altera contineatur in altera; sed quod inde oritur latus, nec ratio est ipsorum numerorum, nec sanè quantitatem exprimit rationis, quæ utrisque intercedit. Alioquin diviso numero quovis per æqualem, quæ inde oritur unitas, exprimeret quantitatem rationis æqualium, quam tamen quantitate carere suprà adstruximus. Quinimò, datis pluribus rationibus, *v. gr.* 4 *ad* 2, & 9 *ad* 3, si diviso utriusque antecedente per

ſuum conſequentem, exhiberent orti 2 & 3 veram quantitatem iſtarum rationum; oporteret, ut ex his ortis compoſitus numerus, nimirum 5, exhiberet quoque veram quantitatem rationis compoſitæ. Atqui ratio compoſita eſt 36 *ad* 6, cujus quantitatem jam exprimeret ortus 6, diverſus ſanè ab iſto 5. Obtinuit tamen uſus, ut rationes denominentur à latere orto; ſic ratio 4 ad 2 dicitur dupla, & 9 ad 3 tripla: verùm hæc nomina arbitrio hominum impoſita; retineri quidem poſſunt, veritati autem derogare nullo modo debent. Quanquam nec utilitate caret iſte modus denominandi rationes; ſiquidem arguit, rationes eſſe majores, quarum denominator eſt major, & contrà: eodem modo ſinus majores congruunt majoribus arcubus, quorum tamen veram quantitatem exprimere nemini videntur. Cœterùm, ut linea eſt dupla lineæ, quam bis continet; ita, propriè loquendo, dupla foret ratio alterius rationis, quam bis continet; ſed pro eo duplicatam dicere maluerunt Scriptores, quorum arbitrio ſynonyma alioquin vocabula *dupli* & *duplicati*, res planè diverſas ſignificare intelliguntur. Verùm id quod eſt multò maximum; nimirum omnium quantitatum menſuram eſſe quantitatem homogeneam, & in diviſione genuina fieri applicationem menſuræ homogeneæ ad quantitatem menſurandam, ortum vero ex tali applicatione, nihil aliud eſſe, quàm numerum Arithmeticum, exprimentem, quoties menſura continetur in menſurato; hoc ſcilicet eſt, quod omnem dubitationem excludit. Ita falluntur profectò, qui applicatâ lineâ rectâ illatabili ad aream datam, putant inveniri latitudinem rectanguli; quaſi non potiùs ſecundum veras diviſionis leges applicaretur rectangulum æquè longum diviſori, & æquè latum unitati aſſumtæ, ad aream extenſam quoque ad longitudinem diviſoris; & quaſi non ortus ex iſta applicatione, numerus eſſet Arithmeticus, exprimens, quoties rectangulum menſurans contineatur in menſurato, vel (cùm per 1. VI eadem ſit ratio) quoties latitudo rectanguli applicati contineatur in latitudine rectanguli menſurati; quò ſcilicet diviſio verè opponatur multiplicationi, quæ reſolvat hujus productum in ſua elementa. Quemadmodum enim omnis multiplicator eſt numerus Arithmeticus (ut habet *Stevinus* in Arithmetica Practica;) ita omnis ortus à diviſione eſt ſimiliter numerus Arithmeticus. Quæ quidem omnia facillimè præſenti negotio aptantur. Nam multiplicare rationem nihil eſt aliud, quàm replicare aliquam rationem toties, quot ſunt unitates in numero aliquo Arithmetico, qui dicitur factor. Et dividere rationem, eſt applicare rationem aliquam ad aliam rationem, ut inveniatur numerus Arithmeticus, exprimens, quoties menſurans ratio contineatur in menſurata. Id ſi hic fieret, nihil dubium, quin vera patefieret rationis quantitas. At enimverò, cùm applicatur terminus alicujus rationis ad alterum, num putamus rationem ap-

plicari

plicari ad rationem? quo pacto igitur ortus ex tali applicatione poteſt exprimere quantitatem datæ rationis? Verum eſt quidem, quòd ortus ex applicatione termini ad terminum, rationem habet ad unitatem eandem, quam dividuus ad diviſorem; ſed hoc modo eadem prodit ratio, quæ ante diviſionem fuerat, aliis tantùm terminis expreſſa; nec proinde quantitas rationis datæ invenitur in menſura aliqua prius nota, quemadmodum in aliis magnitudinibus diviſis aſſolet, & inſtituti noſtri ratio poſtulat: Siquidem tum demum quantitatem rationum exactè determinâſſe videbimur, cùm eas omnes in una aliqua ac eâdem communi menſurâ æſtimare noverimus; id quod Logarithmorum ope præſtari, definitione modò traditâ innuere volui. Ex qua porro intelligitur, cùm ſinguli Logarithmi numerent particulas rationum inde ab unitate ad ſingulos ordine abſolutos procedendo coacervatarum; fieri non poſſe, quin æqualibus Logarithmorum differentiis (id eſt, æqualibus particularum incrementis) congruant quoque æquales rationes abſolutis intercedentes (cùm integra ex æquali numero particularum æqualium conflata, inter ſe ſint æqualia;) adeoque Logarithmos eſſe in proportione Arithmetica, cùm eorum abſoluti ſunt in Geometrica; idcirco poſſe operationem Regulæ proportionum in compendium redigi, ſubſtitutâ additione & ſubtractione loco multiplicationis & diviſionis: Denique rationis cujuſque bipartitionem, tripartitionem, *&c.* quæ alioquin requireret extractionem radicis quadratæ, cubicæ, *&c.* conſiſtere in bipartitione, tripartitione, *&c.* differentiæ Logarithmorum datis terminis congruentium (hoc eſt, ratiuncularum in ratione data comprehenſarum.) Qui uſus cùm ſit eximius; patet poſtremò, quo pacto tam utiles numeri artificiales, ſeu Logarithmi concinnari poſſint; nimirum inveſtigando, quot ratiunculæ, aſſumtæ magnitudinis, contineantur in ratione cujuſque abſoluti ad *unitatem.* Sic enim unitatis Logarithmus evadit 0, cùm unitatis ad unitatem ratio ſit æqualitatis, quam quantitate carere ſupra aſſerui. Ita nimirum fiet, ut cùm inter multiplicandum vel dividendum unitas nihil mutet; hujus Logarithmus 0 (dum additio & ſubtractio ſubſtituuntur multiplicationi & diviſioni) nihil quoque additione vel detractione ſui mutet. Numerus autem ratiuncularum in ratione decupla contentarum commodiſſimè aſſumitur 1,0000000 (hoc eſt, una decupla ratio in numerum partium decimalium rotundum diſtributa.) Ita enim fiet, dum inter unitatem & 10 intercedit una ratio decupla, & porrò inter 10 & 100 altera, inter 100 & 1000 tertia, & deinceps; ut in centupla quidem ratione contineantur ratiunculæ 2,0000000 (hoc eſt, duæ decuplæ rationes in numerum partium rotundum diſtributæ) in millecupla verò ratione contineantur 3,0000000 (hoc eſt, tres rationes decuplæ in numerum par-

tium rotundum distributæ;) & deinceps. Unde primùm hoc commodi consequimur, ut absolutis, iisdem characteribus expressis, iidem competant Logarithmi; veluti si absoluto 2 competat Logarithmus 0,3010299; etiam absolutis 20, 200, 2000 competent Logarithmi 1,3010299; 2,3010299; 3,3010299. Etenim si rationes 2 ad 1,20 ad 1,200 ad 1, & deinceps, intelligantur partitæ, illa quidem in rationes 2 ad 1 & 1 ad 1; ista in 20 ad 10, & 10 ad 1; hæc in 200 ad 100, & 100 ad 1; apparet, quòd excessus 2 ad 1, quo illa superat rationem 1 ad 1 æqualis sit excessui 20 ad 10, quo ista superat rationem 10 ad 1, idemque æqualis excessui 200 ad 100, quo hæc superat rationem 100 ad 1. Ergo si ratio 2 ad 1 præter æqualitatis rationem (quam innuit characteristica 0) contineat ratiunculas 3010299, qualium ipsa decupla continet 1,0000000; certè ratio 20 ad 1 præter unam decuplam (quam innuit characteristica 1) continebit eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299; & ratio 200 ad 1 præter duas decuplas (quas innuit characteristica 2) continebit similiter eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299. Unde porro & hoc consequimur, ut ex inspecta characteristica, uniuscujusque absoluti valorem æstimare queamus. Nam cùm in decupla contineantur 1,0000000 ratiunculæ numero rotundo, & in centupla 2,0000000 ratiunculæ numero itidem rotundo; oportet, ut quæcunque sunt inter decuplam & centuplam contineant plus quam unam decuplam, minùs autem quam duas; quamobrem characteristica omnium absolutorum, qui sunt inter 10 & 100, ipsiusque adeo denarii (hoc est, omnium numerorum, qui scribuntur duobus characteribus) erit 1; & sic deinceps.

His ita ordinatis, proximum est, ut ostendamus, quomodo inveniatur mensura rationis, quam quisque absolutus obtinet ad unitatem, in partibus, qualium decupla continet 1,0000000 (hoc est, quomodo cujusque absoluti Logarithmus investigandus sit.) Verbi gratiâ: Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculas, qualium decupla continet 1,0000000. Dispesco igitur rationem datam 100[5 ad 1 in suas partes, nimirum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum posteriores duæ constituunt duas decuplas (unde patet Characteristicam fore 2;) itaque restat, ut investigemus, quota pars sit reliqua ista ratio 100[5 ad 100 ipsius decuplæ. Quod si igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in sese, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatæ sc. rationis) termini rursus in se ducti procreabunt duplicatam duplicatæ, id est, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100: atque ita continuatâ multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in seipsum, evadat decuplus ejus, quem ductus continuus

tinuus

tinuus termini 100 in seipsum producit; denominator potestatis postremò genitæ ostendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cùm alter terminorum sit 100, cujus potestates omnes constant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam potestatem, quæ prioris termini (nimirum 100rij) æquè altam potestatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quàm verbis docere præstat.

100[5000 (1)
5001 (1)

1005000
5025

1010025 (2)
5200101 (2)

1010025
10100
20
5

1020150 (4)
0510201 (4)

1020150
20403
102
51

1040706 (8)
6070401 (8)

1083068 (16)
8603801 (16)

1173035 (32)
5303711 (32)

1376011 (64)
1106731 (64)

1893406 (128)

1893406 (128)
6043981 (128)

3584985 (256)
5894853 (256)

12852116 (512)

Hæc potestas plusquam decuplo excedit potestatem æquè altam 100rij; ergo resumo 256tam, eamq; duco, non in sese, ut modò, sed in proximè præcedentem, nimirum 128vam, hoc modo:

3584985 (256)
6043981 (128)

6787831 (384)
1106731 (64)

9340130 (448)
5303711 (32)

10956299 (480)

Hæc potestas denuò excedit æquè altam 100rij plusquam decuplo; ergo eandem 448vam duco, non in 32dam, ut modò, sed in proximè præcedentem, hoc modo:

9340130 (448)
8603801 (16)

10115994 (464)

Ubi rursus nimium colligitur; ergo eandem adhuc 448vam duco, non in 16tam, ut modò, sed in proximè præcedentem, nimirum 8vam, hoc modo:

9340130 (448)
6070401 (8)

9720329 (456)
0510201 (4)

9916193 (460)
5200101 (2)

10015603 (462)

Quæ potestas rursus excedit limitem; quare eandem 460mam duco, non in 2dam, sed in 1mam, hoc modo:

9916193 (460)
5001 (1)

9965774 (461)

Cùm

Cùm igitur 462da poteſtas termini 100⌊5 excedat æquè altam 100^{rij} plus quam decuplo; at 461ma ejuſdem termini 100⌊5 excedat æquè altam 100^{rij} minùs quam decuplo: ajo, rationem 100⌊5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minùs autem quàm 462^{bus}.

Cœterùm

Cùm poteſtas	460	ſit	9916193	& differentiæ		
	461		9965774	49581	propemodum	
	462		10015603	49829	æquales;	

Itaque partem proportionalem, quâ poteſtas juſta, nimirum 10000000 excedit proximè minorem 9965774, per Regulam auream facilè ac tutò reperire datur, ſumendo nimirum,

juſtæ	10000000
& proximè minoris	9965774
differentiam	34226, & dicendo:

Ut differentia inter proximè minorem & majorem (nimirum 49829,)
Ad differentiam inter proximè minorem & juſtam (putà 34226;)
Ita 10000, ad 6868; quæ ſunt partes decimales unius vicis, adeò ut ratio 100⌊5 ad 100 contineatur in decupla 461⌊6868 vicibus. Porrò, Si decupla (ſive ratio 100⌊5 ad 100 ſumta 461⌊6868 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100⌊5 ad 100 ſemel ſumta? Prodeunt 21659⌊7 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100⌊5 ad 100, quibus ſi addas rationes 100 ad 10, & 10 ad 1, hoc eſt bis decuplam, conſtantem ratiunculis 2,0000000; fit integra menſura rationis 100⌊5 ad 1 (ſive Logarithmus abſoluti 100⌊5) hic ſcilicet 2,0021659⌊7.

Pari modo invenietur Logarithmus abſoluti 99⌊5, vel ratio abſoluti 99⌊5 ad 1, ſi ex ratione 100 ad 1 (quæ æquipollet bis decuplæ) auferas rationem 100 ad 99⌊5, hoc eſt, ex ratiunculis 2,0000000 auferas numerum ſimilium ratiuncularum in ratione 100 ad 99⌊5 contentarum. Quæratur igitur primùm, quoties ratio 100 ad 99⌊5 contineatur in decupla. Ubi rurſus alter terminorum cùm ſit 100, operationis haut indiget; alter verò 99⌊5 continuo ductu in ſeipſum elevandus eſt ad eam poteſtatem, quæ decuplo minor ſit poteſtate 100^{rij} æquè altâ. En operationem:

995000 (1)
599 (1)

8955000
895500
49750

9900250 (2)
520099 (2)

8910225
891023
198
49

9801495 (4)
5941089 (4)

8821345
784120
980
392
88
5

9606930 (8)
396069 (8)

9229310 (16)
139229 (16)

8518016 (32)

8518016 (32)
6108158 (32)

7255660 (64)
665527 (64)

5264459 (128)
9544625 (128)

2771452 (256)
2541772 (256)

554290 (512)

Hæc poteſtas pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100^{rij} æquè altâ; ergo reſume

2771452 (256)
9544625 (128)

1459018 (384)
665527 (64)

1058613 (448)
6108158 (32)

901728 (480)

Quæ poteſtas rurſus plusquam decuplo minor eſt poteſtate 100^{rij} æquè altâ, ergo reſume

1058613 (448)
139229 (16)

977026 (464)

Quæ etiam pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100^{rij} æquè alta; ergo reſume

1058613 (448)
396069 (8)

1017002 (456)
5941089 (4)

996814 (460)

Hæc quoque pluſquam decuplo minor eſt poteſtate 100^{rij} æquè altâ; ergo reſume

1017002 (456)
520099 (2)

1006857 (458)
599 (1)

1001823 (459)

Cùm igitur 460ma poteſtas termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100^{rii} pluſquam decuplo; at 459na ejuſdem termini 99[5 deficiat ab æquè altâ 100^{rii} minùs quàm decuplo; ajo, rationem 100 ad 99[5 contineri in decupla pluſquam 459 vicibus, minùs autem quàm 460.

Tum, Ut differentia poteſtatum $459^{næ}$ & $460^{mæ}$ (nimirum 5009) ad differentiam $459^{næ}$ & juſtæ (putà 1823:) Ita 10000, ad 3639. Quare ratio 100 ad 99 [5 continetur in decupla 459[3639 vicibus.

Porrò

Porrò, Si decupla (sive ratio 100 ad 99[5 sumta 459[3639 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejusmodi ratiunculas continebit ratio 100 ad 99[5 semel sumta. Prodeunt 21769[3 ratiunculæ, quæ sunt exacta mensura rationis 100 ad 99[5, quâ scilicet ratio 99[5 ad 1 deficit à ratione 100 ad 1, hoc est, à bis decuplâ, quæ cùm constet ratiunculis 2,0000000, demtis hinc 21769[3, restat mensura rationis 99[5 ad 1, hæc scilicet 1,9978230[7, qui proinde est Log-us absoluti 99[5.

Atque hoc modo æstimatis rationum quantitatibus in communi quadam mensura, non solùm natura & usus Logarithmorum clarius elucescit; sed & constructio eorundem multò facilior evadit. Id quod magis perspicuum fiet, cùm ostendero alterum etiam longè promtiorem modum rationes æstimandi. Sed amolienda est priùs difficultas, quæ, haut scio, an cuiquam detecta, plures utique in errorem induxit. Cum enim ratio duobus terminis intercedens vulgò haut aliter consideretur, quàm accipiendo alterutrum terminum ut antecedentem, & alterum ut consequentem; unde cùm ratio est quanta (hoc est, cùm termini sunt inæquales) vel major terminus est antecedens, & dicitur ratio majoris inæqualitatis, vel minor est antecedens, & dicitur ratio minoris inæqualitatis: Ajo ego, eandem rationem iisdem terminis conceptam posse ac debere (saltem in Musicis, atque in hac nostra Logarithmotechnia) alio etiamnum modo considerari ita, ut neuter terminorum existimetur tanquam antecedens, vel consequens, sed uterque capiatur simul pariter tempore atque ordine. Sic *v. gr.* in Musicis intervallum diapente, sive ratio $\frac{3}{2}$ vel $\frac{2}{3}$, potest quidem accipi ita, ut numerus undationum ab acutiori phthongo in aëre excitatarum, nempe ternarius, sit antecedens, & binarius, exhibens numerum undationum pari temporis spatio â graviori phthongo effectarum, sit consequens, dum intelligatur acutior phthongus tempore (vel saltim cogitatione) præcedere graviorem; & vice versâ: sed nihil vetat, quò minus etiam ambo isti phthongi simul atque eodem tempore consonent, adeóque neuter altero sit vel tempore vel naturâ prior. Cœterùm nihilo majus ob hoc vel minus evadit intervallum diapente (ratione sequialterâ constans) sive acutior phthongus præcedat graviorem, sive contrà, seu denique ambo simul consonent. Ita, licèt utilis sit demonstrationibus Geometricis consideratio vulgaris, quâ minor terminus antecedens ad majorem consequentem dicitur minorem rationem habere, quàm idem ille major tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam consequentem obtineat: Negari tamen haut potest, eundem numerum ratiuncularum contineri in sesquialtera ratione, sive ternarius sit antecedens, sive binarius, sive neuter; adeóque considerationem antecedentis & consequentis in æstimanda mole vel mensura rationum nullum instar habere.

Non

Non ſecùs ac quinarius negatus (—5) mole haud differt à quinario affirmato (+5) cùm uterque conſtet quinque unitatibus; diſſimulatâ nimirum affectione, propter quam negatus vel affirmatus cenſetur, & ſolâ mole vel quantitate ſimpliciter æſtimatâ: cùm tamen accipiendo quinarium negatum, prout ſigno negationis affectus eſt, verum ſit, eùm minorem eſſe, non modò quovis numero affirmato, ſed & omni negato, qui à nihilo minùs differat, quàm ipſe, quales ſunt binarius vel ternarius negatus (—2, vel—3.) Ubi præter molem numeri conſideratur quoque, utram in partem eadem abeat à nihilo, affirmatam an negatam. Ita quoque ſive uniſonum (vel æqualitatis rationem, quæ quantitate caret, atque ideò rectè componitur nihilo) ponas in phthongo graviori (vel in binario) indéque aſcendas ad phthongum invervallo diapente acutiorem (vel ad ternarium;) ſive contra ponas uniſonum in acutiori (vel æqualitatis rationem in ternario) indeque deſcendas ad phthongum intervallo diapente graviorem (vel ad binarium:) certè eàdem eſt utrobique quantitas intervalli Muſici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium) licèt ab uniſono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diverſas planè partes abeat. Unde ſi moles ſola, aut quantitas rationis æſtimetur, diſſimulando utram in partem (majoriſne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major eſt ratio ternarii ad binarium, quàm binarii ad ternarium. Sed ſi cum mole unà includas quoq; conſiderationem proceſſùs à majori termino ad minorem, vel contrà; non eo inficias, minorem eſſe quamvis rationem minoris inæqualitatis non modò quâvis ratione majoris inæqualitatis; ſed & quâvis aliâ minoris inæqualitatis, quæ ab æqualitate minùs abſit. Ita ratio antecedentis 5 ad conſequentem 8, non modò minor eſt ratione antecedentis 8 ad conſequentem 6 (vel 5) ſed eàdem quoque minor eſt ratione antecedentis 6 (vel 7) ad conſequentem 8: licèt ſepoſitâ vel neglectâ notione antecedentis & conſequentis, eadem ſit moles rationis $\frac{5}{8}$ atque $\frac{8}{5}$. Diſtinguemus igitur deinceps inter quantitates mole-majores, & affectione-majores: ita ut in rationibus notio inæqualitatis majoris vel minoris nil niſi affectionem innuat. Eas porrò rationes appellamus mole-majores, quarum major terminus diviſus per minorem, dat quotum majorem; & vice verſâ. Præterea majoris inæqualitatis rationum quæcunque mole, eædem & affectione majores ſunt; at minoris inæqualitatis rationes quò ſunt mole majores, eò affectione minores ſunt. Quibus præmiſſis, digeremus ea, quæ reſtant, in propoſitiones.

PROPOSITIO I.

Si duæ quantitates ejusdem affectionis auferantur ab invicem (affirmata sc. ab affirmata, vel negata à negata) sitque quantitas reliqua ejusdem affectionis cum duabus ab initio datis; quantitas ablata mole-minor est quantitate ex qua auferebatur. Sin quantitas reliqua diversæ sit affectionis à duabus initiò datis; quantitas ablata mole-major est quantitate ex qua auferebatur. Sit exempli gr.

ratio subducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{5}{8}$)	$\frac{3}{5}$	($\frac{24}{25}$	} tres scilicet ratio-

nes ejusdem affectionis, putà minoris inæqualitatis singulæ; ergo, inquam, ratio subducta $\frac{5}{8}$ mole-minor est ratione ex quâ $\frac{3}{5}$. Sit rursus

ratio subducenda	ratio ex qua	ratio reliqua	
$\frac{8}{5}$)	$\frac{3}{2}$	($\frac{15}{16}$	} quarum priores

duæ sunt ejusdem affectionis, nimirum majoris inæqualitatis ambæ, at tertia $\frac{15}{16}$ diversæ est affectionis, putà inæqualitatis minoris; ergo, inquam, ratio subducta $\frac{8}{5}$ mole-major est ratione ex quâ $\frac{3}{2}$.

PROPOSITIO II.

Si sint quotcunque rationes continuæ & terminorum æquidifferentium; v. gr. $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$, & deinceps, faciendo scilicet antecedentem cujusque ex posterioribus rationibus æqualem consequenti proximè præcedentis, & à minoribus progrediendo ad majores: Erit quælibet præcedentium rationum mole-major qualibet sequente; sed & differentiarum inter ipsas rationes tam primarum, quàm secundarum, tertiarum, cæterarumque adeò omnium in infinitum, semper præcedens mole-major est sequente. Sin à majoribus terminis progrediare ad minores; contrarium eveniet.

Patet ex collatione sequentis tabellæ cum propositione prima.

Rationes.

Rationes.	Diff: primæ.	Differentiæ secundæ.
a		
$a+b$		
	$aa+2ab+bb$	
	$aa+2ab$	
$a+b$		$a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$
$a+2b$		$a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$
	$aa+4ab+4bb$	
	$aa+4ab+3bb$	
$a+2b$		$a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$
$a+3b$		$a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$
	$aa+6ab+9bb$	
	$aa+6ab+8bb$	
$a+3b$		$a^4+14a^3b+72aabb+56ab^3+128b^4$
$a+4b$		$a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$
	$aa+8ab+16bb$	
	$aa+8ab+15bb$	
$a+4b$		
$a+5b$		

Propositio III.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eademque minima vocetur a, differentia autem primæ & secundæ rationis vocetur b, tum ex differentiis secundis prima vocetur c; atque ex tertiis prima vocetur d; & sic porro: Aio secundam rationem fore $a+b$, tertiam $a+2b+c$, quartam $a+3b+3c+d$ quintam $a+4b+6c+4d+e$; atque ita deinceps, componendo singulas rationes ex prima & tot differentiis, quot quæque locis abest à prima, ipsis autem differentiis jungendo coëfficientes numeros figuratos, primis quidem radices, secundis trigonales, tertiis pyramidales, atque ita porrò, singulosque adeò, prout naturali serie ordinantur in subjecta Tabella:

Unitates.	radices.	trigonales.	pyramidales.	trigonotrigonales.	trigonopyramidales.	pyramidipyramidales.	trigonotrigonopyramid.	trigonopyramidipyramid.	pyramidipyramidipyramida.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	
1	4	10	20	35	56	84	120		
1	5	15	35	70	126	210			
1	6	21	56	126	252				
1	7	28	84	210					
1	8	36	120						
1	9	45							
1	10								

Nimirum eodem modo, quo iidem figurati numerant complementa poteſtatum à radice binomia genitarum; obſervato aſcenſu obliquo à ſiniſtra dextrorſum.

Sic undecima ratio conſtat ex $a + 10b + 45c + 120d + 210e + 252f + 210g + 120h + 45i + 10k + l$; ſumtis ordine numeris imam tabellæ baſin occupantibus.

Exhibet

Exhibet autem tabella non modò quotam velis rationem; ſed & ſummam quotcunque continuè ſequentium, pari fermè negotio methodoque. Sic ſumma quinque rationum eſt $5a+10b+10c+5d+e$, obſervato aſcenſu obliquo, ut antè.

Demonſtratio.

Rationes.	diff: primæ.	Secundæ.	Tertiæ.	4
a				
	b			
$a+b$		c		
	$b+c$		d	
$a+2b+c$		$c+d$		e
	$b+2c+d$		$d+e$	
$a+3b+3c+d$		$c+2d+e$		
	$b+3c+3d+e$			
$a+4b+6c+4d+e$				

Cùm enim per præcedentem, progrediendo à majoribus terminis ad minores (vel quod idem eſt, à minoribus rationibus ad majores) non modò ſecunda ratio excedat primam, ſed & primarum, ſecundarum, cæterarumque differentiarum ſecunda quæque excedat primam; licebit ſanè iſtos exceſſus vocare b, c, d, & deinceps.

Cùm a. differentiarum tertiarum prima ſit	d	Ex hypotheſi;
Et quartarum prima (quâ ſecunda tertiarum excedit primam)	e	
Erit ſanè ſecunda tertiarum	$d+e$	
Rurſus cùm ſecundarum differentiarum prima ſit	c	Ex hypotheſi;
Et tertiarum prima (quâ altera ſecundarum excedit primam)	d	
Erit ſanè altera ſecundarum	$c+d$	
Sed 2da 3tiarum (quâ tertia ſecundarum excedit alteram) erat	$d+e$	
Ergo tertia ſecundarum erit	$c+2d+e$	
Porrò cùm primarum differentiarum prima ſit	b	Ex hypotheſi;
Et ſecundarum prima (quâ ſecunda primarum excedit primã)	c	
Erit ſanè ſecunda primarum	$b+c$	
Sed altera ſecundarum (quâ tertia primarum excedit 2dam) erat	$c+d$	
Ergo tertia primarum	$b+2c+d$	
Sed & 3tia 2darum (quâ quarta primarum excedit 3tiam) erat	$c+2d+e$	
Ergo quarta primarum erit	$b+3c+3d+e$	
Denique cùm prima ratio ſit	a	Ex hypotheſi;
Et differentia inter primam & ſecundam rationem	b	
Erit ſanè ſecunda ratio	$a+b$	
Et cùm differentiarum primarum ſecunda foret	$b+c$	
Erit tertia ratio	$a+2b+c$	

Sed

Sed & differentiarum primarum tertia erat $b+2c+d$
Ergo quarta ratio $a+3b+3c+d$
Tandem differentiarum primarum quarta erat $b+3c+3d+e$
Ergo quinta ratio $a+4b+6c+4d+e$

Postremò rationes	Prima	a	addantur,
	Secunda	$a+b$	
	Tertia	$a+2b+c$	
	Quarta	$a+3b+3c+d$	
	Quinta	$a+4b+6c+4d+e$	

fit summa quinque rationum $5a+10b+10c+5d+e$.

Rationes vel magnitudines.

Prima	a
2	$a+b$
3	$a+2b+c$
4	$a+3b+3c+d$
5	$a+4b+6c+4d+e$
6	$a+5b+10c+10d+5e+f$
7	$a+6b+15c+20d+15e+6f+g$
8	$a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h$
9	$a+8b+28c+56d+70e+56f+28g+8h+i$
10	$a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+k$

Propositio IV.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eadémque maxima vocetur a, differentia autem primæ & secundæ vocetur b, tum differentiarum secundarum prima vocetur c, tertiarum prima d, & sic deinceps; Aio secundam rationem fore $a-b$, tertiam $a-2b+c$, quartam $a-3b+3c-d$, quintam $a-4b+6c-4d+e$; atque ita deinceps, alternatis semper signis affirmatis & negatis. Demonstratur ut præcedens.

Propositio V.

Datæ rationis multiplicem invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datæ rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & à facto aufer ipsam differentiam, reliqui semissem adde termino majori, & detrahe minori; ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæsitâ. Tum si termini prodeuntes sint

ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis ; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris & à fractione liberis. *V.gr.* Quæratur rationis $\frac{25}{28}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus reſtant 9, cujus ſemis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28, facit $32\frac{1}{2}$, detractus autem minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulò major quadruplo rationis $\frac{25}{28}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{41}{2}$ & $\frac{65}{2}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{41}{65}$ paulò major quæſitâ.

Demonſtratio hujus & ſequentis propoſitionis conſtabit ex propoſitione VII.

Propoſitio VI.

Datæ rationis partem imperatam invenire prope verum.

Conſtructio. Differentiam terminorum datæ rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quæſitæ conſtat unitatibus, atque ex iis partibus exemtâ unâ, reliquarum ſemiſſem adde termino minori, & detrahe quoque majori ; ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæſitâ : Tum ſi termini prodeuntes ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis ; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris, & à fractione liberis. *V.gr.* Oporteat rationis $\frac{3}{5}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 diviſa quinquefariam exhibet $\frac{2}{5}$, quæ eſt una pars quinta, eximenda ex integra ſumma quinque partium, quæ erat 2, & reſtant $\frac{8}{5}$, quarum ſemis $\frac{4}{5}$ additus termino minori 3, facit $3\frac{4}{5}$; detractus verò ex majori 5, reliquum facit $4\frac{1}{5}$; erit igitur ratio $3\frac{4}{5}$ ad $4\frac{1}{5}$ paulò minor, quàm pars quinta rationis $\frac{3}{5}$. Reductis terminis $3\frac{4}{5}$ & $4\frac{1}{5}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{19}{5}$ & $\frac{21}{5}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{19}{21}$ paulò minor quæſitâ. Rurſus inveniendus ſit rationis $\frac{8}{11}$ ſemis. Differentia terminorum 3 bipartita exhibet $1\frac{1}{2}$, qui eſt unus ſemis, eximendus ex integra ſumma duarum partium 3, & reſtat $1\frac{1}{2}$, cujus ſemis $\frac{3}{4}$ additus termino minori 8, facit $8\frac{3}{4}$; detractus autem ex majori 11, relinquit $10\frac{1}{4}$; erit igitur ratio $8\frac{3}{4}$ ad $10\frac{1}{4}$ paulò minor ſemiſſe rationis $\frac{8}{11}$. Reductis terminis $8\frac{3}{4}$ & $10\frac{1}{4}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{35}{4}$ & $\frac{41}{4}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{35}{41}$ paulò minor quæſitâ.

Propoſitio VII.

Invenire, quantum pars rationis imperata, quæ per præcedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Conſtructio.

Constructio. Primò, si partis imperatæ denominator sit numerus impar; sume rationes, quæ sunt rationi per præcedentem inventæ utrinque vicinæ & æquidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer à media, & mediam à maxima, prodibunt duæ differentiæ, quarum differentiam denuò investigabis, tantisper asservandam. Deinde partis imperatæ denominatori unitatem detrahe, reliqui semissem in tabula Figuratorum insertâ prop. III, quære inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, sic invenies, quoties sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. *V.gr.* Scire velim, ratio $\frac{19}{21}$ per præcedentem inventa quantum deficiat ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$. Rationi $\frac{19}{21}$ utrinque vicinæ & æquidifferentes sunt $\frac{17}{19}$ & $\frac{21}{23}$. Differentia minimæ à media $\frac{437}{441}$ & mediæ à maxima $\frac{357}{361}$, & harum differentiarum differentia $\frac{157437}{157757}$ asservanda. Tum partis imperatæ denominatori 5 detraho 1, restant 4, cujus semissi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens est 1, indicans differentiarum differentiam suprà asservatam $\frac{157437}{157757}$ semel sumtam exhibere particulam, quâ ratio $\frac{19}{21}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$, adeò ut hujus exactior pars quinta sit ratio $\frac{19}{21}$ + ratione $\frac{157437}{157757}$.

Sin partis imperatæ denominator sit numerus par; sume semissem differentiæ terminorum rationis per præcedentem inventæ, quem ejusdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum æquidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam asservabis. Deinde partis imperatæ denominatorem bipartire, & invento semissi congruentes in tabella propositioni III. subjuncta species excerpe, saltim usque ad *c* speciem, positoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{3}$; duc cujusque speciei valorem in suum coëfficientem, collectisque omnibus in unam summam, habebis, quot vicibus sumenda sit differentiarum differentia suprà asservata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. Ex.gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per præcedentem inventus sit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum est 6, cujus semis 3 detractus minori termino, relinquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuæ terminorum æquidifferentium $\frac{146}{149}$, $\frac{149}{152}$, $\frac{152}{155}$, $\frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata à differentia duarum ma-

jorum

jorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentiam $\frac{1753825}{1753879}$ aſſervandam. Partis imperatæ denominator eſt 8, cujus ſemiſſi 4 congruunt in tabella propoſitioni III ſubjuncta ſpecies iſtæ: $a+3b+3c$; ſed $a=\frac{1}{2}$, & $3b=6$, & $3c=4$, quæ juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differentiæ $\frac{1753825}{1753879}$ ſuprà ſervatæ ſumendum eſt decuplum cum ſemiſſe, ut acquiramus particulam, quâ octans per præcedentem inventus deficit ab exactiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus eſt $\frac{1753582}{1754122}$ vel $\frac{876791}{877061}$, & ſemis per VI eſt $\frac{3507677}{3507731}$; adeò ut rationis $\frac{8}{11}$ octans exactior præter rationem per præcedentem inventam $\frac{149}{155}$ contineat etiamnum ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

Demonſtratio.

Cùm per III hujus ſumma trium rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarum ſit $3a+3b+c$

Erit ejuſdem ſummæ triens $a+b+\frac{1}{3}c$ α

Rurſus differentia primæ & ſecundæ rationis eſt b

ſecundæ autem & tertiæ $b+c$

Ergo differentiarum differentia c

Cujus triens $\frac{1}{3}c$

Quem ſi addas mediæ trium rationum $a+b$

Erit ſumma $a+b+\frac{1}{3}c$

Æqualis nempe trienti trium rationum ſuprà notato literâ α. Ergo diſcerptâ ratione quavis in tres continuas terminorum æquidifferentium, ut jubet propoſitio VI, erit media ex iis paulò minor triente totius diſcerptæ, & quidem tantò minor, quantus eſt triens differentiæ differentiarum intercedentium inter rationem primam & ſecundam, nec non inter ſecundam & tertiam, quod innuit propoſitio VII.

Sic quoque per III hujus, ſumma ſedecim rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarũ, eſt $16a+120b+560c+1820d$

Et ejuſdem ſummæ octans $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$ β

D Tum

Tum per tabellam propositioni III subjunctam, quatuor mediæ ex istis sedecim, nimirum 7ma, 8va, 9na, 10ma, sunt	$\left\{\begin{array}{l} a+6b+15c+20d \\ a+7b+21c+35d \\ a+8b+28c+56d \\ a+9b+36c+84d \end{array}\right.$
Differentia duarum priorum	$b+6c+15d$
posteriorum	$b+8c+28d$
Differentiarum differentia	$2c+13d$
Hujus decuplum	$20c+130d$
& semis	$c+6\frac{1}{2}d$
Unà cum summa duarum ex quatuor istis mediar.	$2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$
Facit	$2a+15b+70c+228d$

Æqualem octanti sedecim rationum suprà notato literâ β. Ergo si ratio data discerpatur in partes sedecim, erunt duæ mediæ ex iis simul, paulò minores octante totius discerptæ; & quidem tantò minores, quantum est differentiæ differentiarum (intercedentium inter rationes ex sedecim istis septimam & octavam, nec non inter 9nam & 10mam) decuplum cum semisse. q. e. d.

Propositio VIII.

Rationes terminorum æquidifferentium sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica.

Explicatio. Sumatur per VI hujus rationis cujusvis, v.gr. $\frac{8}{9}$ pars quævis, v.gr. semis $\frac{33}{35}$, tum pars quævis alia, v.gr. triens $\frac{25}{26}$, & ut fiant terminorum æquidifferentium, pro $\frac{8}{9}$ sumatur $\frac{16}{18}$, & pro $\frac{25}{26}$ æquipollens $\frac{50}{52}$. Medium Arithmeticum terminorum rationis totius est 17, semissis, 34, trientis 51. Liquet igitur, ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad semissem suum $\frac{33}{35}$; ita reciprocè semissis medium Arithmeticum 34 esse ad medium totius 17: & ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad trientem suum $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium Arithmeticum 51 esse ad medium totius 17: ideóque etiam, ut semis $\frac{33}{35}$ est ad trientem $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium 51 esse ad medium semissis 34: Tantum porrò hanc analogiam abire à vero, quantum semisses, trientes, partesve aliæ rationum per VI hujus inventæ deficiunt ab exactis. Quamobrem id agendum, ne defectus ille instituto nostro officiat. Cæterùm minor erit defectus, minúsque adeò officiet, quò rationes in analogiam adscitæ minores fuerint. Cùm enim secundum demonstrationem præcedentis, octans exactus sedecim rationum foret $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$, at summa duarum ex sedecim istis mediarum $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$, qui est octans per VI inventus; patet differentiam horum octantium consistere in con-

temtiori

temtiori parte ſecundarum & tertiarum differentiarum. Atqui rationum continuarum minores, habent differentias primas minores, ac proinde differentiarum ſecundarum & tertiarum partem exiliorem multò etiamnum minorem. Sed exemplo res fiet illuſtrior. Nam rationis $\frac{99}{101}$ ſemis, per VII hujus, eſt $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$. ubi ratio $\frac{199}{201}$ ab exactiori ſemiſſe deficit ratiunculâ ſuperbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$. Rurſus rationem $\frac{199}{201}$ (quæ priùs aſſumtæ $\frac{99}{101}$ propemodũ ſemis eſt) ſi denuò bipartiamur per VII hujus, habebimus $\frac{399}{401} + \frac{127997599}{127997601}$. ubi ratio $\frac{399}{401}$ ab exactiori ſemiſſe deficit ratiunculâ ſuperbipartiente $\frac{127997599}{127997601}$. Minor eſt igitur defectus, cùm bipartimur rationem minorem $\frac{199}{201}$, quàm ſi bipartiamur majorem $\frac{99}{101}$, quantò ſcilicet ratiuncula ſuperbipartiens $\frac{127997599}{127997601}$ minor eſt ſuperbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$, hoc eſt propemodum, quantò 8 milliones minores ſunt 128 millionibus, nimirum ſedecim vicibus. Sed & ejuſdem rationis quo minor pars ſumetur per VI hujus, eò minùs deficiet à vero. Sic rationis $\frac{99}{101}$ ſemis, per VII hujus, erat $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$, & ejuſdem triens per eandem eſt $\frac{299}{301} + \frac{8099459197}{8099460797}$; ubi quidem triens $\frac{299}{301}$ (qualis per VI invenitur) minùs deficit ab exactiori, quàm ſemis $\frac{199}{201}$ (per eandem inventus;) quantò ratiuncula $\frac{8099459197}{8099460797}$ minor eſt alterâ $\frac{7999399}{7999401}$. Unde ſequitur, cùm bipartitâ ratione $\frac{99}{101}$ ſecundum VI hujus, non niſi binarium quaſi perdamus in octo millionibus, vel unitatem in quatuor millionibus; futurum, ut iſtius ſemiſſe $\frac{199}{201}$ (ſive $\frac{99[5}{100[5}$) diminuto quovis modo per analogiam VItæ hujus ſuperſtructam, minùs etiam perdamus; adeóque à ratione $\frac{99[5}{100[5}$ nos analogicè argumentari poſſe ad quamvis minorem terminorum æquidifferentium, ita ut minùs quàm unitatem perdamus in quatuor millionibus; quóque ratio, ad quam argumentamur, minor fuerit, eò jacturam fore minorem.

Propoſitio IX.

Datâ menſurâ rationis $\frac{99[5}{100[5}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; invenire menſuram cujuſvis minoris rationis terminorum æquidifferentium, in particulis ſimilibus.

Rationis $\frac{99[5}{100}$ menſura ſuprà inventa fuit 21769[3, & rationis $\frac{100}{100[5}$ menſura ibidem 21659[7, quarum ſumma exhibet rationem $\frac{99[5}{100[5}$ = 43429[0. Dehinc oporteat nos invenire menſuram rationis $\frac{100}{101}$. Ergo per præcedentem dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{100}{101}$ (nimirum 100[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100;) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 43213. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 101 excedit Log-um abſoluti 100. Quare, cùm Log-us abſoluti 100 ſit 2,0000000; oportet, ut Log-us abſoluti 101 ſit 2,0043213.

Porrò invenienda ſit menſura rationis $\frac{101}{102}$. Dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{101}{102}$ (nimirum 101[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100;) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 42787. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 102 excedit Log-um abſoluti 101. Quare, cùm Log-us abſoluti 101 foret 2,0043213; oportet, ut Log-us abſoluti 102 ſit 2,008600.

Cùm autem in omnibus hiſce analogiis terminus ſecundus ſit 100, & tertius 43429; liquet, ad inveniendam menſuram cujuſvis rationum ſequentium nihil amplius reſtare, quàm ut dividamus numerum 43429 per medium Arithmeticum terminorum rationis datæ. Cæterùm invenimus nos quidem rationis $\frac{99[5}{100[5}$ menſuram 43429, quæ fortè debebat eſſe unitate major, putà 43430; ſed facilè intelligit quivis, ſi pro ratione $\frac{99]5}{100]5}$

aſſumſiſſemus

assumsissemus $\frac{999[5}{1000[5}$, & in cumulandis horum terminorum potestatibus calculum ad plures locos extendissemus, ad majorem utique præcisionem perveniri potuisse, adeóque huic methodo ad accuratam facilitatem nihil quicquam deesse. At non deest modus etiam hoc ipso facilior, qui post acquisitos paucos Logarithmos solâ additione rem peragit, & præterea probam suam secum fert, quem propositionibus sequentibus breviter exponemus.

Propositio X.

Rationum duarum continuarum differentia est ad aliarum duarum continuarum differentiam; ut harum communis termini quadratum, ad istarum communis termini quadratum; dummodo singularum termini sint æquidifferentes.

Sint duæ rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, & $\frac{a+b}{a+2b}$, quarum terminus communis est $a+b$, & hujus quadratum $aa+2ab+bb$; sint verò & aliæ duæ continuæ $\frac{a+3b}{a+4b}$, & $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum communis terminus est $a+4b$, & hujus quadratum $aa+8ab+16bb$. Singularum termini differunt communi excessu b. Differentia duarum priorum est $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, & posteriorum duarum $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$. Atque hæ differentiæ sunt quoque terminorum æquidifferentium. Ergo per VIII hujus, sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica; hoc est, ut prior differentia $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, ad posteriorem $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$: ita horum terminorum medium Arithmeticum $aa+8ab+15\frac{1}{2}bb$, ad medium Arithmeticum istorum $aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; hoc est propemodum, ut communium terminorum quadrata, nimirum $aa+8ab+16bb$ ad $aa+2ab+bb$; quæ ab istis mediis Arithmeticis non nisi quantitate $\frac{1}{2}bb$ differunt, exiguâ sanè, & in rationibus minoribus (ubi sc. differentia terminorum b ad ipsos terminos exiguum instar habet) facilè contemnendâ.

Propositio XI.

Rationum trium continuarum differentiarum differentia, eſt ad aliarum trium continuarum differentiarum differentiam; ut cubus medii Arithmetici mediæ ex his, ad cubum medii Arithmetici mediæ ex iſtis; dummodo ſingularum rationum termini ſint æquidifferentes.

Sint tres rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$, quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3}{a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum eſt $a+\frac{3b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; ſint verò & aliæ tres continuæ $\frac{a+2b}{a+3b}$, $\frac{a+3b}{a+4b}$, $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4}{a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4}$, & mediæ illarum medium Arithmeticum $a+\frac{7b}{2}$, cujus cubus $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$. Cæterùm ſingulæ rationes differunt communi exceſſu b; at differentiæ differentiarum non ſunt terminorum æquidifferentium, ſiquidem differentia terminorum prioris eſt $2ab^3+3b^4$, at poſterioris $2ab^3+7b^4$: ſecus ac in præcedenti propoſitione. Quare cum illic res expediretur regulâ proportionum ſimplici inverſâ, hic opus eſt duplici inverſâ; nimirum:

Ut medium Arithmeticum prioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum poſterioris ($2ab^3+7b^4$) ad medium Arithmeticum poſterioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum prioris ($2ab^3+3b^4$:) Ita differentia differentiarum prior ad poſteriorem: Ita quoque Cubus medii Arithmetici mediæ trium priorum rationum (nimirum $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$) ad Cubum medii Arithmetici mediæ trium poſteriorum rationum (nimirum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$.)

Quæ

Quæ analogia vera esse deprehendetur, si productum extremorum æquale sit producto mediorum.

Atqui primus terminus $a^4 + 6a^3b + 12aabb + 9ab^3 + \frac{3b^4}{2}$ in $2ab^3 + 7b^4$ $= 2a^5b^3 + 19a^4b^4 + 66a^3b^5 + 102aab^6 + 66ab^7 + \frac{21b^8}{2}$, si ducatur in quartum $a^3 + \frac{21aab}{2} + \frac{63abb}{4} + \frac{343b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3 + 40a^7b^4 + 297a^6b^5 + 1180a^5b^6 + 2991\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Rursus secundus terminus $a^4 + 14a^3b + 72aabb + 161ab^3 + \frac{263b^4}{2}$ in $2ab^3 + 3b^4 = 2a^5b^3 + 28a^4b^4 + 144a^3b^5 + 322aab^6 + 263ab^7 + \frac{789b^4}{2}$, si ducatur in tertium $a^3 + \frac{9aab}{2} + \frac{27abb}{4} + \frac{35b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3 + 40a^7b^4 + 339a^6b^5 + 1593a^5b^6 + 4558\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Hoc igitur productum cùm consentiat cum isto, non modò in primis & secundis speciebus, sed & in maxima parte tertiarum & quartarum; ajo analogiam in propositione memoratam, veram esse. Nam defectus, qui hîc apparet in productis terminorum, in ipsis terminis longè minor erat, quippe qui multiplicando crevit. Ut taceam in minoribus rationibus differentias secundas & tertias nullius ferè momenti esse.

Simili modo ostendetur, differentias tertias rationum continuarum & terminorum æquidifferentium, esse ut Quadrato-quadrata; quartas, ut Quadrato-cubos terminorum, qui singulis in tabella propositioni II subjunctâ, è regione opponuntur. Atque ita deinceps.

Propositio XII.

Numerorum in progressione Arithmetica ordinatorum Quadrata conveniunt in differentiis secundis, Cubi in tertiis, Quadrato-quadrata in quartis, & sic deinceps.

Patet ex inspectione tabellarum subjectarum:

Numeri	Quadrata	diff. 1.	diff. 2.
1	1		
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		

Numeri

Numeri	Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Numeri	Quadrato-quadrata.	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.	diff. 4.
1	1				
		15			
2	16		50		
		65		60	
3	81		110		24
		175		84	
4	256		194		24
		369		108	
5	625		302		
		671			
6	1296				

Hinc patet, datis v. gr. cubis quatuor, vel quadrato-quadratis quinque, quo pacto cæteri continuâ additione ſuccenturiari poſſint. Sint enim dati

Cubi	diff. 1.	diff. 2.	diff. 3.
$a=8$			
	$e=19$		
$b=27$		$h=18$	
	$f=37$		$k=6$
$c=64$		$i=24$	
	$g=61$		$k=6$
$d=125$		$l=..$	
	$m=..$		
$n=...$			

Dic: $k+i=l$, $l+g=m$, $m+d=n$.

Propoſitio XIII.

Logarithmos quotvis locorum continuâ ac ſolâ additione producere ita, ut ultimo exiſtente probo, cœteri omnes ſint probi.

Con-

Constructio. Cùm sit $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} + \frac{c^3a}{b^4}$, & deinceps continuando progressionem in infinitum; si ponamus $a = 100 =$ medio Arithmetico rationis $\frac{99[5}{100[5}$ & $b = 100000$, & $c = 0[5$, adeò ut $b-c$ sit $99999[5 =$ medio Arithmetico rationis datæ $\frac{99999}{100000}$, cujus mensuram invenire oportet, erit $\frac{a}{b-c}$ (nimirum $\frac{100}{99999[5}$) $= \frac{a}{b}$ (sive $\frac{100}{100000}$ vel $0|001$) $+ \frac{ca}{bb}$ (sive $\frac{0[5*100}{10000000000}$ vel $\frac{50}{10000000000}$ vel $0|000000005$) $+ \frac{cca}{b^3}$ (sive $\frac{0[25*100}{1000000000000000}$ vel $\frac{25}{1000000000000000}$ vel $0|000000000000025$) $+ \frac{c^3a}{b^4}$ (sive $\frac{0[125*100}{100000000000000000000}$ vel $\frac{1[25}{10000000000000000000}$ vel $0|000000000000000000125$) $= 0|001000005000025000125$:

sin manentibus a & b, ut antè, ponatur $c = 1[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|001000015000225003375$: vel si rursus manentibus a & b, ponatur $c = 2[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|001000025000625015625$. Liquet ex præcedenti, quo pacto datis numeri 5 quadrato & cubo, sequentium quoque numerorum 15, 25, cæterorumque quadrata & cubi additione continuâ inveniri possint. Istis igitur numeris cum suis quadratis & cubis ritè dispositis ita, ut post unitatem in 0[001 sextum locum occupet ultima figura numeri 5 (vel 15, vel 25;) & sextum ab hac locum ultima figura quadrati 25 (vel 225, vel 625;) & ab hac rursus sextum locum ultima figura cubi 125 (vel 3375, vel 15625; (quemadmodum exempla superiora ostendunt: conflati erunt numeri, qui in tertium Regulæ aureæ terminum 43429 ducendi sunt singuli, ut prodeat mensura rationum datarum $\frac{99999}{100000}$, $\frac{99998}{99999}$, $\frac{99997}{99998}$. Atque hæc multiplicatio, ut solâ quoque additione perficiatur, digerendus est tertius terminus 43429 in tabellam subsidiariam, hoc modo:

1	43429
2	86858
3	130287
4	173716
5	217145
6	260574
7	304003
8	347432
9	390861

Acquisitâ hoc modo rationum omnium mensurâ à $\frac{99999}{100000}$ usque ad $\frac{10000}{10001}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; mox addendo has ordine retrogrado concinnabimus Logarithmos singulorum absolutorum à 10000 ad 100000; quorum ultimus si sit probus, præcedentes omnes erunt probi; nisi fortè error posterior quasi ex condicto corrigat priorem, quod in hac non magis quàm omnibus aliis probis, nec nisi rarissimè usuvenire potest.

ATque ita expositâ methodo construendi Logarithmos novâ, accuratâ, & facili, haud scio, an opus sit monere Lectorem, si ad praxin accedere luberet, non requiri compositorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primùm excludendos, deinde omnes à quinario productos; ita ut restent soli Logarithmi numerorum in unitatem, 3rium 7rium 9rium exeuntium, àtque horum quoque tertium quemque, cùm sit ex ternario compositus, omitti posse. Sic acquisitis Logarithmis absolutorum 1003 & 10013, omisso Log-o absoluti 10023 ex ternario compositi quærendus est Log-us absoluti 10033, utpote tricessimi ab absoluto 10003; tum Log-us absoluti 10043, tricesimi ab absoluto 10013: tum rursus omisso Log-o numeri 10053, quærantur Log-i numerorum 10063, 10073; atque ita deinceps. Quare dicendum per Regulam Propositione VIII. traditam:

Ut 10048, nimirum medium Arithmeticum inter 10033 & 10063, ad 10018, nimirum medium Arithmeticum inter 10003 & 10033:
Ita 13006, nimirum differentia Logarithmorum congruentium absolutis 10003 & 10033,

ad

ad 12967, differentiam Log-orum competentium absolutis 10033 & 10063.

Dico:

Ut $\left\{\begin{matrix}10048\\10078\\10108\\ \&c.\end{matrix}\right\}$ ad 10018; ita 13006, ad $\left\{\begin{matrix}12967\\ \&c.\end{matrix}\right.$

Item:

Ut $\left\{\begin{matrix}10058\\10088\\10118\\ \&c.\end{matrix}\right\}$ ad 10028; ita 12992, ad $\left\{\begin{matrix}12953\\ \&c.\end{matrix}\right.$

At tertius qui sequitur ordo, nimirum:

Ut $\left\{\begin{matrix}10068\\10098\\ \&c.\end{matrix}\right\}$ ad 10038; ita 12979, ad $\left\{\begin{matrix}12940\\ \&c.\end{matrix}\right.$

hic ipse est, quem omittendum indigeto.

Pari modo tertius quisque in unitatem 7^{rium}, 9^{rium} exeuntium omittetur. Itaque fiet, omissis paribus lucrifaciamus semissem operæ, & detractis quinariis rursus partem decimam, denique excluso tertio quoque in 1, 3, 7, 9, desinentium, trientem laboris residui; unde non nisi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quæ sunt à 10000 ad 100000, industriam nostram expectant. Hoc est, de 90 chiliadibus restant solùm 24 concinnandæ. Cæteros compositos à 7^{rio}, 11^{rio}, aliis ve primis genitos, non est operæ pretium secernere in methodo tam proclivi; præsertim cùm probando calculo inservire possint.

Cæterum ex iis, quæ hactenus disseruimus, satis liquet, naturam Logarithmorum Geometriæ nullo modo obnoxiam esse; sed verius ac liquidius ex proprio suo fonte manare. Intercedit tamen utrisque cognatio suavis, & contemplatione dignissima, quam deinceps paucis exponere non gravabor.

Propositio XIV.

Sit Hyperbole *MBF*, cujus latus rectum *KL* æquale sit transverso *BC*; erunt asymptoti *AN* & *AE* ad angulos rectos, & quadratum *DF* æquale rectangulo *CDB* per 21. *I.* Conicor. Ex *B* & *F* cadant perpendiculares ad asymptoton *BI* & *FH*. Dico, *AH* esse ad *AI*, ut *BI* ad *FH*.

Demonstratio. Sit $AB = 1 = AC$

$BC = AB + AC = 2$

$BD = a$

$AD = AB + BD = 1 + a = DE$

$CD = BC + BD = 2 + a$

$CD * BD = 2 + a \text{ in } a = 2a + aa = Q: DF$

$DF = \sqrt{2a + aa} = DG$

$AG = AD + DG = 1 + a + \sqrt{2a + aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: AG . AH$

$AH = \dfrac{1 + a + \sqrt{2a + aa}}{\sqrt{2}}$

$EF = DE - DF = 1 + a - \sqrt{2a + aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: EF . FH$

$$FH = \frac{1+a-\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

Ducatur AH in FH;

ponendo $1+a = c$, & $\sqrt{2a+aa} = d$

erit $1+2a+aa = cc$ } subtrahe

& $2a+aa = dd$ }

$1 = cc - dd$

$$\frac{cc-dd}{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = AH*FH \qquad \alpha$$

$\sqrt{2} . 1 :: AB . AI$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AI*BI = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \beta$$

Ergo per α & β, $AH*FH = AI*BI$

& $AH . AI :: BI\ FH$ q.e.d.

Propositio XV.

In diagrammate præcedenti, positâ $AI = BI = 1$, & $HI = a$; oporteat invenire FH.

Dic per præcedentem: ut AH ad AI, ita BI ad FH; hoc est, $1+a . 1 :: 1 . \frac{1}{1+a}$; nimirum FH æqualit est unitati divisæ per $1+a$. Perficitur autem divisio ipso opere sic:

b c) d | e
$1+a$) 1 | 1
f g
$1+a$
h i | k
$0-a$ | $-a$
l m
$-a-aa$
n o | p
$0+aa$ | $+aa$
r
q 3
$aa+a$
t | u
s 3 | 3
$0-a$ | $-a$

Ap-

b c d e e b c f g
Applica $1+a$ ad 1, oritur 1; tum 1 in $1+a$ producit $1+a$ sub-
d h i b c h i
ducendum ex 1, & reſtat $o-a$. Rurſus $1+a$ applicetur ad $o-a$,
k k h i l m
oritur $-a$; tum $-a$ in $o-a$ producit $-a-aa$, ſubducendum ex
h i n o b c p
$o-a$, & reſtat $o+aa$. Ad hoc applica $1+a$, oritur $+aa$; quod
r t
b c q z n o s z
ductum in $1+a$ gignit $aa+a$, ſubducendum ex $o+aa$, & reſtat $o-a$.
Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur $\frac{1}{1+a} = 1-a+aa-a^3$
$+a^4$ (&c.) $= FH$.

Propoſitio XVI.

Quovis numero in partes æquales innumeras diſcerpto; invenire ſummam quarumvis poteſtatum ab innumeris iſtis numeris genitarum.

Numeri dati poteſtas proximè ſuperior poteſtatibus quæſitis, ſi dividatur per exponentem ſuum, extabit ſumma poteſtatum quæſita.

V. gr. Numerus datus ſit 21, hic ſi diſcerpatur in partes innumeras, continebit non modò hos numeros 20, 19, 18, 17 &c. ſed & innumeros interjectos, quorum quiſque intelligitur ductus in unam partem infinitiſſimam numeri 21, Horum igitur omnium productorum ſummam ſi quæras; quoniam ipſa producta ſunt poteſtates primæ (ſive lineæ;) erit poteſtas proximè ſuperior quadratica; & ejus exponens 2, Ergo dati numeri 21 quadratum 441, ſi dividatur per exponentem 2, extabit ſumma omnium primarum poteſtatum, genitarum ab innumeris iſtis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220⌊5. Rurſus quævis poteſtas prima intelligatur ducta in ſeipſam, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum quadratorum. Poteſtas proximè ſuperior eſt cubica, & ejus exponens 3, Ergo dati numeri 21 Cubus 9261, ſi dividatur per exponentem 3, extabit ſumma omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in ſuum latus, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum cuborum. Poteſtas proximè ſuperior eſt quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, ſi dividatur per exponentem 4, extabit ſumma omnium cuborum 48620⌊25.

Demonſtratio.

Demonstratio. Summa omnium ab unitate imparium æqualis est quadrato numeri terminorum sic numerus terminorum omnium imparium ab unitate usque ad 21 est 11, cujus quadratum 121 æquale est summæ omnium horum imparium; 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit summam omnium eorundem imparium unà cum paribus inclusis ipso numero terminorum 11; deficit autem á summa omnium parium æque àc imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non potest excedere vel deficere à summa omnium tam parium, quàm imparium, plusquam ipso numero terminorum imparium, hoc est (si termini sint innumeri) eodem numero terminorum sive dimidio termini maximi, ducto in partem infinitissimam numeri dati. Quod productum si quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad summam omnium terminorum; nondum utique divisus est numerus datus in partes innumeras, quod est contra hypothesin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quam imparium) duplicatum; vel, quod idem est; Dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quàm imparium) æquale est summæ omnium terminorum.

Rursus; Numerus pyramidalis ultimi ab unitate imparium, æqualis est summæ omnium quadratorum ab iisdem imparibus factorum. Sic numeri 21, tanquam ultimi imparium, pyramidalis 1771, æqualis est summæ omnium quadratorum factorum ab his imparibus, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Unde haud secùs, ac modò, conficietur; eundem pyramidalem duplicatum (si termini sint innumeri) vel, quod idem est; trientem cubi facti à numero dato, æqualem esse summæ omnium quadratorum ab imparibus æquè ac paribus factorum.

Item; Ultimi cujusvis Trigonus in se ductus, æqualis est summæ omnium cuborum ab imparibus æquè ac paribus factorum. Sed Trigonus iste, sive summa terminorum, suprà æqualis erat $\frac{\text{Quadrato}}{2}$, ergo ejusdem. Trigoni quadratum æquale est $\frac{\text{Quadrato quadrato}}{4} =$ summæ omnium Cuborum. Atque ita deinceps.

Propositio XVII.

Quadrare Hyperbolam.

In diagrammate præcedenti, positio $AI = 1$; intelligatur asymptoos inde ab *I* versus *E* divisa in partes æquales innumeras, quæ sint *v.gr.*

I

$Ip = pq = qr = a$. Erit, per XIV & XV hujus, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, &c. & $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, &c. & $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, &c. Sed $ps + qt + ru =$ areæ $BIru =$

$$= \left.\begin{cases} 1 - a + aa - a^3 + a^4 \\ 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \\ 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \end{cases}\right\} \text{\&c.} =$$
$$= 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4,$$

hoc est, = numero terminorum contentorum in linea Ir, minus summâ eorundem terminorum, plus summâ quadratorum ab iisdem, minus summâ cuborum, plus summâ quadrato-quadratorum, &c.

Hinc posito, ut antè, $IA = 1$; sed $Ip = 0[1$ = numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIps$ = numero terminorum = 0[1, minus summa eorundem terminorum = 0|005, plus summa quadratorum ab iisdem = 0|000333333, minus summa cuborum = 0|0000025, plus summa quadrato-quadratorum = 0|000002, minus summa quadrato cuborum = 0|000000166, plus summa cubo-cuborum = 0|000000014, &c.

$$+\begin{cases} 0|1 \\ 0|000333333 \\ 0|000002 \\ 0|000000014 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad -\begin{cases} 0|005 \\ 0|000025 \\ 0|000000166 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} + & 0|100335347 \\ - & 0|005025166 \\ \hline + & 0|095310181 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{rl} - & 0|005025166 \end{array}$$

$+\ 0|095310181$ = areæ $BIps$.

Sic posito $Iq = 0|21$ = numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIqt$ = numero terminorum = 0|21, minus summa eorundem terminorum = 0|02205, plus summa quadratorum ab iisdem = 0|003087, minus summa cuborum = 0|000486202, plus summa quadrato-quadratorum = 0|000081682, minus summa quadrato-

cuborum

cuborum = 0|000014294, plus ſumma cubo-cuborum = 0|000002572, minus ſumma quadrato-quadrato-cuborum = 0|000000472 plus ſumma quadrato-cubo-cuborum = 0|000000088.

+	0|21	−	0|02205
+	0|003087	−	0|000486202
+	0|000081682	−	0|000014294
+	0|000002572	−	0|000000472
+	0|000000088	−	0|000000016
+	0|000000003		
+	0|213171345	−	0|022550984
−	0|022550984		
+	0|190620361 = areæ *BIqt*.		

Unde apparet, ut ratio *AI* ad *Ap* (1 ad 1|1) eſt dimidiata rationis *AI* ad *Aq* (1 ad 1|21;) ita aream *BIps* eſſe dimidiam areæ *BIqt*. Cæterum proclive eſt hunc calculum extendere ad quotvis loca, quod mihi tentanti, prodiit area *BIps* = 0|0953101798043248600439521232807650922206053 4; & area *BIqt* = 0|1906203596086497200879042465615301844412 1072, quam cùm exactè duplam deprehenderem iſtius ſuperioris ſcivi inde me calculum rectè poſuiſſe.

Propoſitio XVIII.

Comparare areolas Hyperbolicas cum ratiunculis abſolutorum æquidifferentium.

In diagrammate præcedenti, poſitâ *AI* = 1, & aſymptoto inde ab *I* verſus *E* diviſâ in partes æquales innumeras, quæ ſint *v, gr. Ip, pq, qr*: erit areola *BI ps* menſura ratiunculæ, quam *AI* obtinet ad *Ap*; & areola *s p q t* menſura ratiunculæ, quam *Ap* obtinet ad *Aq*; & areola *t q r u* menſura ratiunculæ, quam *Aq* obtinet *Ar*, &c. Atque areolæ iſtæ ſupputantur prorſus eodem modo, quo ſuprà Propoſitione VIII & IX. rationes terminorum æquidifferentium. Id quod paucis indicare, oportunum duxi.

Propoſitio XIX.

Invenire ſummam Logarithmorum.

In eodem diagrammate poſitâ $AI = 1$, & aſymptoto inde ab I verſus E diviſâ in partes æquales innumeras, quæ ſint *v. gr.* Ip, pq, qr. oportet invenire ſummam areolarum; $BIps + BIqt + BIru$ (&c.) = ſummæ Logarithmorum = ſolido, conſtanti ex areola $BIps$ perpendiculariter inſiſtente lineæ ps, & areola $BIqt$ perpendiculariter inſiſtente lineæ qt; & areola $BIru$ perpendiculariter inſiſtente lineæ ru, &c. ductis nimirum ſingulis in unam infinitiſſimam lineæ datæ.

Conſtructio hujus Problematis congruit cum conſtructione propoſitionis XVII. ſubſtituendo nimirum pro numero terminorum, ſummam eorundem; & pro ſumma terminorum, ſummam quadratorum; & pro ſumma quadratorum, ſummam cuborum; &c. Sic poſitâ $AI = 1$, & $Ip = 0|1$, oporteat nos invenire ſummam omnium Logarithmorum inde ab 1 ad $0|1$.

+ {	0|005 0|000008333 0|000000033		− {	0|000166666 0|0000005 0|000000002
+	0|005008366		−	0|000167168
−	0|000167168			
	0|004841198	= ſummæ omnium Log-orum.		

Hinc patet, quomodo productum continuum omnium à 0 ad numerum datum Arithmeticè progredientium inveniri queat. Nam ſumma Log-orum, eſt Log-us producti continui.

Patet quoque ex præcedentibus, quo pacto Problema *Merſennianum*, ſi non Geometricè ſaltem in numeris, ad quotvis uſque locos ſolvi poſſit. Atque hic jam filum abrumpere cogor, tantiſper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus. *FINIS.*

Sequitur

MICHAELIS ANGELI RICCII
GEOMETRICA Exercitatio.

Præfatio.

ABBATI
STEPHANO GRADIO
Michael Angelus Riccius S. P. D.

SCRIPTIONEM hanc meam argumenti, ut vides, inter Mathematica difficillimi, sed æquè ad difficiliora quæque Problematum efficienda, & obscuriora Theorematum cognoscenda utilissimi, cùm in Geometrico, tùm in Analytico pulvere, ad te mittendam duxi, vir ornatissime, STEPHANE GRADI, *quem ego unum omnium hujus Civitatis plurimi facio, ob egregias animi laudes, præsertim verò propter acre his de rebus existimandi judicium, quotidianis gravissimarum inter nos disputationum experimentis mihi perspectum & cognitum. Lege quæso illam diligenter, & ubi diù exactissimæ tuæ censuræ subjectam habueris, ecquid respondeat solitæ tuæ de meis hoc in genere cogitationibus, opinioni, pronuncia. Nam si hoc assequar, ut tibi cæterisque Amicis earundem Disciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in posterum quam ob rem humanissimis tuis hortationibus obluctor, cùm autor mihi esse perseverabis edendi alia quæ tecum jampridem communicavi, de præceptis universæ Artis analyticæ, geometricâ methodo breviter & expeditè demonstratis, unà cum animadversione erratorum quæ in ipsis tradendis magni nominis Auctores errasse deprehendi;*

hendi ; faciliùſq; obtinebis ne diutiùs premam apud me quæcumque de Geometria in genere diſputata & literis conſignata incertas propoſitiones redegi ; & ex his illam præcipuè à Torricellio, & à te quoq; tan topere commendatam, quæ integram doctrinam triginta propoſitionum Archimedis, Lucæ Valerii, & aliorum, una complectitur ; duaſque præterea, quibus totam penè Jo. Caroli de la Faille de centro gravitatis partium circuli, & ellipſeos doctrinam [juſto volumine ab ipſo explicatam] abſolvo. Statui autem pauca aliquot hujus ſcripti exemplaria typis imprimere, quò commodiùs poſſint ad peritos hujuſmodi ſcientiarum Amicos, tùm per Italiam, tùm exteras apud gentes pervenire, accenſo potiùs ea in re tuo ſtudio obſecutus, quàm ingenio meo. Neque enim is ego ſum, cui nomen famæ per ambitionem ingerere libeat ; aut quem non magis indagatæ veritatis cognitio, quàm cognitæ oſtentatio delectet. Interim hunc amicitiæ noſtræ jampridem inſtitutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli intermiſſæ, fructum jucundiſſimum feram, ut quæ hac in re de me ſentis amicè, hoc eſt [ut Euripidi placet] liberè, te loquentem audiam ; eoque, quid cæteri & ſentiant & loquantur, ſecurus fiam. Vale, Romæ octavo Idus Julii 1666.

MICHAELIS ANGELI RICCII GEOMETRICA EXERCITATIO.

DEFINITIONES.



1 Oteſtatem quamlibet, ejuſque radicem, voco dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, ut A 2 in, B 3, fiet productum A 2 in B 3; cui producto illud ſimile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypotheſi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, ſimile eſt producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta ſunt quæ ad eundem gradum pertinent; ut duo rectangula, quippè quæ ad ſecundum gradum pertinent; & duo ſolida, quæ ad tertium.

4 Terminos cùm dico, intelligi volo duos numeros ſeu æquales ſeu inæquales, vel numerum & unitatem, vel duas unitates. Terminos inæquales appello duos numeros inæquales, vel numerum & unitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas unitates.

5 Productum in linea fieri ſecundum terminos datos, aut poſitos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes ſunt ipſi termini dati vel poſiti; radices verò ſegmenta illius rectæ lineæ ſectæ in proportione terminorum eorumdem.

Sit verbi cauſa, quæpiam recta linea, cujus majus ſegmentum ad minus ſit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo ſegmenti majoris in quadratum minoris erit factum in linea data ſecundum terminos poſitos 3, & 2; quia ſegmenta quæ ſunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum ſunt etiam 3, & 2.

Rursus esto, quemadmodum segmentum majus ad minus ejusdem lineæ, sic 3 ad 1, productum ex cubo majoris segmenti in segmentum ipsum minus, erit productum in linea factum secundum terminos positos, numerum & unitatem. Ita, A 3 in B 1 [si A vocetur majus segmentum, B verò, minus] est productum factum in linea A + B secundum terminos 3, & unitatem, quia radices A & B sic sunt, ut est numerus 3 ad unitatem; & dignitatis A 3 exponens est, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens est, unitas, item data.

Lemma Primum.

SI duæ rectæ in eadem ratione secentur, producta similia facta ex segmentis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fient ex totis.

Fig. I. Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F ita sectæ, ut quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum segmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ sunt similia per secundam definitionem; iisque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5 per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in F E 3 ad D E 5. Quia rationes ex quibus ratio producti A C 2 in C B 3 ad A B 5 componitur, eædem sunt, ac componentes rationem producti D F 2 in F E 3 ad D E 5, ob sectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, &c.

Lemma Secundum.

ISdem positis, Dico, A C 2 in C B 3 fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ D E, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex segmentis rectæ D E alia respondent orta ex segmentis rectæ A B in eadem proportione sectæ; & illa ad homogeneum suum D E 5 eandem rationem habent, atque ista ad suum A B 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem A C 2 in C B 3 ad A B 5, ex hypothesi, est eadem, ac ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5: cæterorum verò productorum ex segmentis ipsius D E ad D E 5, eadem est atque ratio productorum

productorum sibi respondentium, quæ fiunt ex segmentis rectæ A B, ad A B 5. Cùm igitur ratio A C 2 in C B 3 [quod maximum esse ponitur] ad A B 5 sit major, per octavam quinti Elem., ratione cæterorum productorum sibi similium ad A B 5; major etiam erit ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5, quàm ratio cæterorum similium productorum ex segmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipsum D F 2 in F E 3 per decimam quinti Elem. est maximum. Quod, &c.

Lemma Tertium.

SI data recta linea secetur in ratione terminorum inæqualium, & dividendo, fiat segmentorum differentia ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inventa proportionalitas vel ipsa erit proportionalitas æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum dividendo, & sic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia segmentorum segmento minori.

Esto A C ad C B, ut 9 ad 6, & A D differentia segmentorum A C, C B: erit dividendo, 3 ad 6, ut A D ad C B, vel ad segmentum sibi æquale, D C: Quoniam vero hæc proportio non est proportio æqualitatis, fiat D E differentia segmentorum A D, & D C; 3, differentia numerorum 6 & 3; & dividendo, erit, ut 3 ad 3, sic D E ad A D, proportio æqualitatis. Fig. II.

Rursus A C sit ad C B, ut 5 ad 3; & A D segmentorum differentia; dividendo erit, A D ad C B, seu ad sibi æquale segmentum D C, ut 2 ad 3. Et iterum dividendo [segmentorum A D & D C, esto, differentia, E C,] 1 ad 2 ut E C ad A D seu D E; & tertiò [facta F E terminorum D E & E C differentia] dividendo inveniemus, ut 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod, &c. Fig. III.

Ratio Lemmatis est, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & unitatis, semper est numerus aut unitas, ut per se patet: & nos dividendo, semel atque iterum, ac sæpius, demimus semper minorem terminum divisæ proportionalitatis qui est numerus vel unitas, de majori termino seu numero, utimurquè deinceps residuo tantùm [quod est eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis divisæ: at non possumus sic demendo progredi in infinitum, quia unitates in terminis sunt finitæ, sed exhauritur tandem omnis differentia, residuumque majoris termini proportionalitatis divisæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis,

in

in qua unitas ad unitatem, vel numerus ad ſibi æqualem numerum, eſt ut ſegmentum ad aliud æquale ſegmentum. Quod oſtendere oportebat.

Quod ſi ab ea proportione æqualitatis, in qua deſitum eſt rurſus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per veſtigia diviſionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua ſegmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cujus propoſitionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non poteſt, in Geometria omnia quæ dividendo concluduntur, ex contrario converti poſſe, & componendo concludi illud ipſum, quod ponebatur ante diviſionem, ut in quinto Elementorum oſtenditur. Exempli gratia, ſit majus ſegmentum datæ rectæ ad minus, ut 2 ad 1. Igitur Dividendo 1 ad 1, eſt ut differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua ſegmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma Quartum.

SI duo quælibet producta orta ſint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter ſe, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E P 5, quam habet dignitas B C 5 ad dignitatem E F 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas A B 3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alii in numeris demonſtrarunt.

Lemma Quintum.

DAtis quatuor quantitatibus, quarum prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quam tertia ad quartam, productum quod gigniex duabus extremis eſt minis producto ex mediis.

Augeatur prima donec fiant quatuor geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex mediis. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus mediis. Quod &c.

THEOREM

THEOREMA PRIMUM

PRoductum in aliqua recta linea factum secundum positos terminos æquales, maximum est omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis lineæ datæ segmentis tanquam ex radicibus.

Recta linea A B secetur æqualiter in puncto C, & sit A C ad C B ut 3 ad 3 [termini æquales positi] Dico productum A C 3 in C B 3, quod sit in linea A B secundum positos terminos, esse omnium similium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud simile productum A D 3. in D B 3. Cùm autem sint quatuor lineæ arithmeticè proportionales cum excessu C D, nimirum A D, A C, C B, & B D, minor est ratio maximæ A D ad A C, quàm C B ad B D; & triplicata ratio ipsius A D ad A C [seu ratio A D 3 ad A C 3] minor est, quàm triplicata ipsius C B ad B D [seu C B 3 ad B D 3] & per quintum Lemma, productum ex mediis quantitatibus, A C 3, in C B 3, majus est producto A D 3 in B D 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonstatur A C 3 in C B 3 esse alio quocumque simili producto majus, & consequenter omnium similium maximum. Quod, &c. Fig. IV.

THEOREMA SECUNDUM.

SI duo rectæ lineæ segmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium; & per consequens, dividendo, sit differentia segmentorum ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ segmentorum ducta in dignitatem minoris segmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem majoris; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit A B recta linea inæqualiter secta in puncto C, & B C ad A C, ut 5 ad 3, qui sint termini positi. Producatur B A in F, donec æquetur F C ipsi C B, & A F erit differentia segmentorum B C & A C. Quoniam vero segmentum majus B C sic est ad minus C A, ut 5 est ad 3, erit dividendo A F ad C A, ut est 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum F A 2 in A C 3, ex dignitate ipsius F A, differentiæ segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti. A C. Secundum A C 3 in C B 5, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in Fig. V.

 dignitatem

dignitatem majoris. Prima dignitais F A 2 habet pro exponente, 2; differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos positos, ut imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ F C [esse autem ejusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ A B.

Sumatur in A B alius punctus præter punctum C, & esto, D; qui accipi a nobis potest infra punctum C, vel supra. In utroque casu, F A nequit habere eam rationem ad A C, quam habet ad A D, sed majorem aut minorem habebit, atque adeò F D non est secta in puncto A secundum rationem ipsius F A ad C A: fiat porrò FE ad E D, ut F A ad A C, & productum F E 2 in E D 3, per secundum Lemma, erit maximum [æque ac productum F A 2 in A C 3] & consequenter majus simili producto FA 2 in AD 3, facto ex segmentis ejusdem rectæ F D. Quod maximum FE 2 in E D 3 habet eandem rationem ad F D 5, dignitatem sibi homogeneam, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5, ut ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur F A 2 in A D 3 [quod diximus esse minus producto FE 2 in E D 3] minorem rationem habet ad F D 5, quàm F E 2 in E D 3 ad idem F D 5, seu minorem, quàm F A 2 in A C 3 ad F C 5; & permutando, F A 2 in A D 3 minorem habet rationem ad FA 2 in A C 3 [seu, per Lemma quartum, A D 3 minorem habet rad A C 3] quàm F D 5 ad F C 5, & longè minorem, quàm C B 5 ad B D 5. Quippe sunt rectæ D B, C B, F C, & F D, arithmeticè proportionales cum excessu, D C; ac propterea in primo casu, F D maxima, in secundo casu, F D minima, est ad F C in minori ratione quàm C B ad D B, & quintuplicata ratio F D ad F C, nempe ratio ipsius F D 5 ad F C 5, est minor quintuplicatâ ratione C B ad D B, seu C B 5 ad D B 5.

Igitur cùm quatuor quantitatum, A D 3, A C 3, C B 5, & D B 5, prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum A D 3 in D B 5 factum ex duabus extremis erit minus producto A C 3 in C B 5 ex mediis. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto A C 3 in B B 5, quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo A C 3 in C B 5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea A B inæqualiter secta, quum est segmentum majus ad minus, uti numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum majus segmentum ad minus, sic numerus ad

ad unitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tam similibus modò factis concluditur, ut id sibi quisque invenire, explicare ac dilatare facillimè possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructioribus, quos hujuscemodi rerum intellectu facilium explicatione frustra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua usum præstantissimum habentia ad inveniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra gravitatis & quadraturas, & ad alia item multa, quæ justo servamus Operi; ubi dabimus novam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas, uti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipses, &, analogiam servando, circulos etiam infinitos. Unde Lectoribus manifestè apparebit, de Conicis me plus multò adinvenisse, quàm cæteros, eosque ingeniosissimos Viros, qui communem tantùm hyperbolen, parabolen, ellipsim, & circulum [figuras Conici in nostra nova serie prædicta, secundi gradus] agnoverunt: alias tertii & quarti & cæterorum non item; nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licèt cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes ingenio Viri, *Fermatius*, ac *Torricellius*, Præceptor meus, inventorum præstantiâ & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui novum insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quamplures *Apollonii* propositiones atque demonstrationes aptari sectionibus nostris & per omnia congruere, affectasque multipliciter æquationes harum sectionum ope resolvi facillimè, & determinari posse. Nunc revertor ad rem.

THEOREMA TERTIUM.

Datâ rectâ lineâ, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data productum: hoc erit maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis ejusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primùm dico, productum, quale descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonstravimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.

Esto AB recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C sitque BC ad CA, ut 5 ad 2. Dico productum BC 5 in CA 2 factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producatur BA in F, ut AF sit differentia segmentorum, & dividendo primam proportionalitatem, nempe BC ad CA, ut 5 ad 2 [sicut in tertio Fig. VI.

 Lemmate

Lemmate præſcribitur] pergamus uſque dum incidamus in proportionem æqualitatis. In noſtra hypotheſi, primum erit, dividendo, 3 ad 2, ut F A differentia ſegmentorum ad A C minus ſegmentum; quam ſecundam proportionalitatem exhibet ſecunda figura, in qua fiat C E differentia ſegmentorum C A, F A; per conſequens erit, dividendo, 1 ad 2, ut C E ad A C; quam quidem proportionalitatem ſeorſim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia ſegmentorum C E & A C, dividendo erit 1 ad 1, ut E H ad E C; quæ eſt demum proportio æqualitatis; ſemper autem minus ſegmentum producimus ut æquemus majori, & ſegmentorum differentiam conſtituamus.

At retrorſum viciſſim, incipiendo à recta E A tertiæ figuræ cujus majus ſegmentum A C eſt 2, minus ſegmentum C E eſt 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum H E 1 in C E 1 eſt maximum in linea C H, per primum Theorema noſtrum, erit proinde, per ſecundum Theorema, E C 1 in C A 2 maximum in drecta E A.

Deinde in recta F C ſecundæ figuræ, majus ſegmentum A F eſt 3; minus A C eſt 2, & ſegmentorum differentia E C eſt 1; porrò cùm E C 1 in C A 2 ſit maximum, erit per ſecundum Theorema, etiam maximum in recta F C productum A F 3 in A C 2.

Poſtremò in lineà A B primæ figuræ, productum A F 3 in A C 2 eſt maximum, ut modò oſtendimus, ergo per ſecundum Theorema eſt etiam maximum A C 2 in B C 5. Quod demonſtrandum erat.

Si loco duorum numerorum detur numerus, & unitas, fit ſimilis conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLION.

ID quod in ſecundo Theoremate ſupponebamus; datâ rectâ lineâ, & datis numeris, 3 & 2, maximum fore productum in ea linea factum ſecundum numeros illos datos; nunc demonſtravimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propoſitio conditionalis, ex poſita illa hypotheſi, non abſoluta, ut patebit conſideranti.

COROLLARIUM.

SI productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumque; maximum fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt geometricè

meticè proportionales. Quippe in Theoremate oſtendimus, productum in linea factum ſecundum terminos datos eſſe omnium maximum; at productum ejuſmodi, ex 5. definitione noſtra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habent, quam dignitatum earundem radices.

PROBLEMA PRIMUM.

Datam lineam rectam ita ſecare, ut productum ex dignitatibus ſegmentorum ſit omnium ſimilium maximum.

Sumantur exponentes duarum illarum dignitatum, rectaque dividatur in ratione horum exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productum erit in linea data factum ſecundum terminos poſitos, nimirum ſecundum exponentes; ac proinde erit maximum per Theorema tertium.

PROBLEMA SECUNDUM.

Æquationem determinare, in qua poteſtas quæſitæ radicis negatur de homogeneo ſub radice data, & dignitate ſua parodica, ut B in A—A 2 || Z 2: vel B in A 3—A 4 || Z 4, &c.

Oritur hujuſmodi æquatio ex dicta parodica dignitate poteſtatis negatæ ducta in B—A, differentiam datæ & quæſitæ radicis, Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, ſi primùm ducatur in A, radicem quæſitam negatam, gignet poteſtatem negatam uno gradu altiorem, quàm ſit ea parodica dignitas [ut patet ex natura multiplicationis] deinpe in † B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, ſub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta, ſunt ipſa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera eſt homogeneum comparationis.

Rurſus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad poteſtatem negatam eſt eadem, ac radicis datæ ad quæſitam; ſed minor eſt poteſtas homogeneo, de quo ipſa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæſita minor eſt datâ; In qua proinde radice datâ nos rectè ſumimus ſegmentum æquale radici quæſitæ A, ut alterum ſegmentum ſit B—A, differentia datæ ac quæſitæ radicis.

Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B—A uno radicis datæ ſegmento, ducto in altero ſegmentum A, vel in hujus poteſtatem, efficitur [per tertium Theorema] ut inde reſultans productum ſit maximum omnium ſimilium, quotieſcunque A, & B—A, ſegmenta ratio-

nem

nem habent eam, quam exponentes suarum dignitatum. Sic in æquatione B in A3 — A4 || Z4; si A, & B — A fuerint ut 3 ad 1, cubus segmenti A in B A ductus gignet partem æquationis B in A3 — A4; quæ est productum in linea data B, omnium similium maximum; cujus proinde magnitudinem non potest unquam excedere homogeneum comparationis, quod semper æquari necesse est illi alteri æquationis parti. Unde canon pro determinanda problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum secundum terminos, qui sunt exponentes ejusdem radicis & parodicæ dignitatis, sub quibus est homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non potest homogeneum comparationis.

Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipsius, A, in B — A, vel in hujus potestatem; semper enim est idem casus tertii Theorematis nostri, in quo productum factum in linea [seu datâ radice B] secundum terminos datos est maximum, termini verò sunt exponentes dignitatum segmenti A & alterius B — A.

Sed uno vel altero exemplo de Geometricis nostris Opusculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

Fig. VII. E singulis punctis datæ rectæ A B ducantur rectæ C D, E F &c. rectæ inter se parallelæ, cum data A B angulum quemcumque efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abcissarum A C, A E, &c. geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere posse mox patebit) Transibit per extrema parallelarum puncta, D, F, &c. perimeter figuræ, cujus diameter aut axis erit A B, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipsæ parallelæ.

Fig. VIII. Nam parallelarum abscissarumque dignitates si fuerint ejusdem gradus, exempli gratiâ F E 1 ad D C 1, ut A E 1 ad C A 1: vel cubi parallelarum ut cubi abscissarum, figura erit triangulum, cujus proprietas notissima est, non parallelas modò & abscissas esse geometricè proportionales, sed parallelarum & abscissarum earumdem potestates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex est rationis linearum seu radicum; ita ut cubi, & quadrato quadrata, &c. abscissarum sint ut cubi, quadrato quadrata, &c. parallelarum; & illorum quoque radices geometricè proportionales.

Sin autem diversorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abscissarum, linea descripta erit curua, habens suum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas est gradu superior dignitate abscissarum: at contra dignitas applicatarum ordinatim ad rectam [quæ curuam in vertice contingit] sumptam pro axe, gradu inferior est dignitate abscissarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Esto

Eſto igitur A G D B una ex præfatis figuris, ejuſque axis A B, & vertex A; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum ſit altior gradu dignitatis abſciſſarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, ut C D, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt conſequenter in figura parallelarum cubi ut quadrata abſciſſarum. Fiat abſciſſa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum, ut minor numerus 2 ad 1, differentiam exponentium, ductaque F C; Dico hanc eſſe tangentem quæſitam. Fig. IX.

Productum enim F A 1 in A D 2 in linea D F, factum ſecundum terminos poſitos 1 & 2, eſt maximum, per Theorema tertium; ſemperque homogeneum dignitati parallelarum; (cùm parallelarum dignitatem exponat major datorum numerorum, maximum vero productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorum, quæ duo ſimul efficiunt numerum majorem.) Ergo ſi accipiamus alium punctum G in axe ſupra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam G H, quæ ſecet E rectam F C (ubi opus fuerit productam,) productum F A 1 in A G 2 non erit maximum in linea F G, quale eſt F A 1 in A D 2 in recta F D; propterea quòd major eſt vel minor ratio ipſius F A ad A G quàm ad A D, & conſequenter F G, F D non ſunt proportionaliter diviſæ. Ergo majorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F D 3 ſibi homogeneum, quàm F A 1 in A G 2 ad F G 3, & permutando, majorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F A 1 in A G 2, (vel ex Lemmate quarto, A D 2 ad A G 2) quàm F D 3 ad F G 3. Sed A D 2 ad A G 2 ponitur in figura; ut C D 3 ad H G 3: F D 3 ad F G 3, ob ſimilitudinem triangulorum, ut C D 3 ad E G 3. Ergo majorem rationem habet C D 3 ad H G 3; quàm C D 3 ad E G 3; & conſequenter C D majorem rationem habet ad H G, quàm ad E G, ac proinde H G recta eſt minor quam E G, & punctus E cadit extra datam curvam A H C H. Eodem pacto de ſingulis punctis ductæ lineæ F C demonſtratur illos cadere ſemper extrà curvam. Ergo F C eſt illius tangens. Quod, &c.

Hæ ſunt parabolæ, ut vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datum punctum duci poſſint, oſtendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc neceſſarium Lemma.

Lemma

Lemma Sextum.

Fig. X. DAto angulo A B C utcumque secto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C subtendat & à recta B D secetur in data ratione R ad S.

Fig. XI. Fiat H G F segmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde ut R ad S, ita fiat F L ad L H; ut angulus A B D ad E B D, sic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur usque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A secet B D in M & B A in puncto A. Dico rectam E A esse quæsitam, quæ à B D in M dividitur in ratione data.

Siquidem anguli H & E: K & B sunt æquales, & hi secti proportionaliter [per trigesimam tertiam sexti Elementorum] à K L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E sunt æquiangula, & A E ad E B, ut H F ad H K. Rursus æquiangula fecimus triangula M B E, L K H, & consequenter E B est ad E M, ut H K ad H L, & ex æqualitate ordinata A E ad E M, ut H F ad H L, & dividendo F L ad L H [seu R ad S] ut A M ad M E. Quod, &c.

Quòd si punctus datus sit extrà, ut in O, ducemus B O rectam [punctus autem O sic detur oportet, ut O B recta cum A B angulum faciat, nec sit ad lineam posita] & faciemus angulum B O L æqualem differentiæ angulorum, H, & E B O; & O L producta satisfaciet quæsito.

Fig. XII. Sit hyperbole A C L, cujus diameter A B, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abscissæ ducta in dignitatem, abscissæ & diametri, ex quibus una recta conflata intelligatur. Exempli gratiâ, quadrato cubi ordinatarum, hoc est L I 5 ad C D 5, sint, ut producta B I 3 in A I 2 ad B D 3 in A D 2, genita ex quadratis abscissarum A I, A D, & cubis rectarum B I, B D, quippe quas efficiunt eædem abscissæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda sit tangens, & ordinatim applicetur C D. Porrò ducatur B C, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti, A E [secans C D in F, & in F item secta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes

producta B I 3 in A I 2, & B D 3 in A D 2, subtendens angulum E C A] & tandem G C parallela rectæ A E, occurrens ipsi AB in G. Dico tangentem quæsitam esse C G.

Sumatur in C G alius punctus K supra & infra C, &, ordinatim applicatis K I secantibus hyperbolen in L, ab I puncto ducatur I C incidens in rectam H B in puncto M, & secans A E in N; quæ H B ipsi A E parallela in H occurrit D C productæ.

Quoniam verò A E secatur in F in ratione 2 ad 3, F A 2 in F E 3, per tertium Theorema, est productum maximum, & ratio F E 3 ad N E 3, seu H B 3 ad M B 3 [propter similitudinem triangulorum H C B, E C F: M B C, C E N] major est ratione N A 2 ad A F 2. Ergo per Lemma quintum majus est H B 3 in A F 2 ipso M B 3 in N A 2; quæ duo producta si comparentur cum C G 5, primum habebit majorem rationem ad C G 5, quàm secundum. Sed ratio primi, quod est H B 3 in A F 2, ad C G 5 eadem est ac ratio B D 3 in A D 2 ad G D 5 [cum H B ad C G sit ut B D ad G D, ob similitudinem triangulorum H B D, C G D; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi: tùm C G 2 ad A F 2, ut G D 2 ad A D 2] ratio secundi, seu M B 3 in N A 2, ad C G 5 est eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia similia sunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G rectæ earumque cubi proportionales: rursùs ut G I 2 ad I A 2, sic C G 2 ad A N 2] Ergo majorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando, B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [seu ex natura hyperboles, C D 5 ad L I 5] majorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, seu [ob similitudinem triangulorum K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimam quinti Elem. dignitas, L I 5 minor est quàm K I 5, & sua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K est extra curuam. Sic de ceteris punctis ostendetur cadere extra curuam, atque adeo C G hyperbolen tangere in solo C puncto. Quod &c.

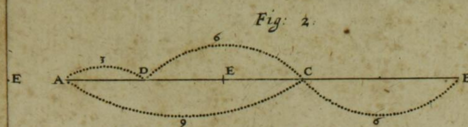
Hæc porrò demonstratio etiam ad ellipses, & circulos accommodari potest.

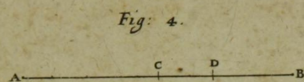
Jam verò quàm latè pateat usus nostri Theorematis tertii, ex propositis exemplis licet intelligere; nec ita multum dissimili aut difficiliori via centra gravitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, invenimus. Interim, si quis Apollonii constructionem atque demonstrationem trigesimæ quartæ propositionis primi Conicorum libri cum nostris comparabit, nonnihil fortasse proficiet in arte dilatandi propo-

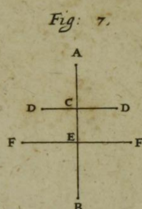
sitiones

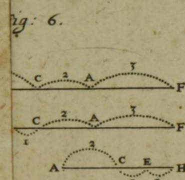
ſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare.

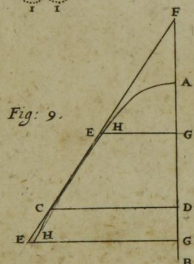
LAUS DEO.

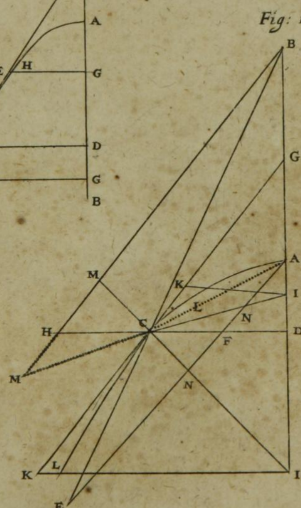

Fig: 2.
E A D E C B
1 6 9 6

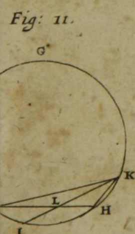

Fig: 4.
A C D B

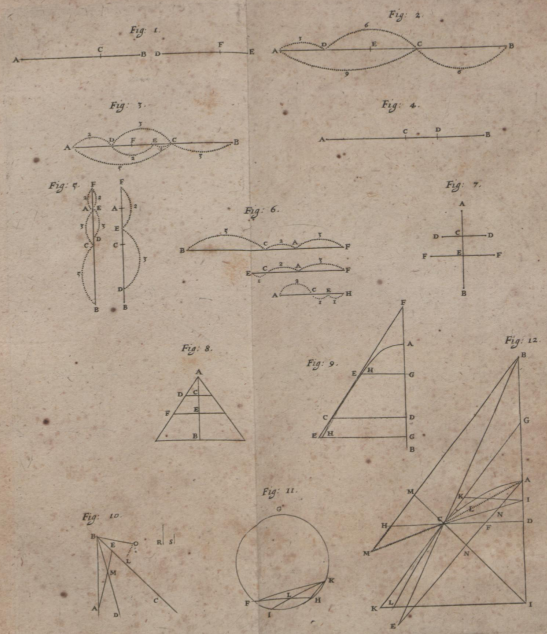

Fig: 7.
A
D C D
F E F
B


ig: 6.
C 2 A 3 F
C 2 A 3 F
A 2 C E H


Fig: 9.
F A E H G C D E H G B


Fig: 12.
B G A K I L N M H C D F M N K L I E


Fig: 11.
G K L H I


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12.